MANUALI HOEPLI

LOGICA MATEMATICA

C. BURALI-FORTI

Professore nella R. Accademia Militare di Torino.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

1894

PREFAZIONE

> Ea si recte constituta fuerint et ingeniose, scriptura haec universalis aeque erit facilis quam communis, et quae possit sine omni lexico legi, simulque imbibetur omnium rerum fundamentalis cognitio.
>
> Leibniz (*Dissertatio de arte combinatoria*).

La logica Aristotelica, o scolastica, studia le forme di ragionamento proprie del linguaggio comune, e dei termini di questo si serve per enunciare le sue leggi. La *logica matematica*, studia le forme di ragionamento proprie delle scienze deduttive e in particolare della matematica, e da questa copia i simboli dei quali si serve per enunciare le sue leggi.

Mentre i termini del linguaggio comune assumono spesso diverso significato o valore a seconda del posto che occupano nel periodo, a causa delle frequenti eccezioni a cui sono soggette le regole grammaticali, i simboli della logica matematica conservano ovunque il medesimo significato, non essendo suscettibili di eccezioni le leggi alle quali si è convenuto che soddisfino.

Di più, mentre i termini del linguaggio comune dànno luogo a combinazioni proprie della speciale struttura di ogni lingua, i simboli della logica matematica costituiscono un sistema di scrittura universale indipendente da qualsiasi lingua.

I caratteri ora accennati separano nettamente la logica scolastica dalla logica matematica, e dànno a quest'ultima un grado di rigore scientifico che è impossibile raggiungere con la prima.

Il merito di aver dati i primi germi dell'attuale logica matematica, spetta incontestabilmente a quella vasta mente di matematico e di filosofo che fu il LEIBNIZ (*Dissertatio de arte combinatoria*, 1666). Leibniz per il primo enunciò la proprietà associativa e commutativa del prodotto logico e la legge di semplificazione. Leibniz concepì per il primo il grandioso progetto di creare una scrittura universale, mediante la quale ogni idea composta potesse esprimersi per mezzo di idee semplici, rappresentate ciascuna da un segno speciale. La tarda età, come egli stesso dice, gli impedì di effettuare il suo progetto, e tradurre in simboli tutto lo scibile allora noto.

Alla risoluzione del problema di Leibniz hanno grandemente contribuito i cultori della logica matematica. Questa ha assunto forma scientifica,

per la prima volta, per opera più specialmente dell'inglese Boole (*An investigation of the laws of thought*, London 1854) che ha applicato alla logica il simbolismo algebrico. Lo Schröder (*Der Operationskreis der Logikkalkuls*, Leipzig 1872) ha opportunamente trasformato il simbolismo del Boole cambiando alcune definizioni; a lui si deve, fra altro, la legge di dualità.

Moltissimi scrittori hanno contribuito al progresso della logica matematica; rimandiamo, per la bibliografia su questo soggetto, alla voluminosa e importante opera dello Schröder, *Algebra del Logik* (1890). Notiamo però esplicitamente — onde risulti ben chiaro appartenere questa logica matematica più al campo matematico che al filosofico — che questi scrittori sono tutti matematici e i loro lavori sono pubblicati in periodici di matematica.

Nelle Università americane la logica matematica fa parte dell'insegnamento ufficiale per opera di Halsted, Peirce, ed altri. Il Poretzky è libero docente in quella russa di Kasan, ed il Nagy in quella di Roma.

La logica matematica fu introdotta in Italia per opera dei prof. Peano (*Calcolo Geometrico...*, 1888) e Nagy (*Fondamento di calcolo logico — Giornale di matematica*, t. XXVIII). Infine il Peano, nel suo opuscolo " *Arithmetices principia, nova*

methodo exposita 1889 „, riuscì ad esporre totalmente in simboli la teoria dei numeri interi. Questo lavoro fu seguito da altri numerosi, per opera di diverse persone. Oggi il *Formulario* che va pubblicando la *Rivista di matematica* si propone di trattare totalmente in simboli le varie parti della matematica.

Il presente manuale contiene gli elementi della Logica matematica, ed è lo sviluppo di un corso di *Letture scientifiche* da me fatte nel corrente anno scolastico presso l'Università di Torino. I segni dei quali ho fatto uso sono quelli adottati per il *Formulario*, ora citato, e i numerosi esempi sono stati scelti nel campo della matematica elementare, per rendere possibile la lettura di questo libro, anche a chi non possiede nozioni di matematica superiore.

Torino, marzo 1894.

Capitolo I.

Nozioni generali.

Scriveremo il segno ϵ, iniziale della parola ἐστί, al posto dell'affermazione *è un*. Scrivendo, p. es., *Dante* ϵ *poeta*, esprimiamo, *Dante è un poeta*, e indichiamo una proposizione, grammaticalmente semplice, della quale Dante è il soggetto (nome proprio) e poeta è l'attributo (nome comune, nome di una classe).

***

In matematica occorre spesso far uso delle classi " Numeri interi „, " Razionali „ " Numeri reali „ ..... Scriveremo:

N al posto di *numero intero positivo* (lo zero escluso).
R „ *razionale positivo* (. . . . .).
Q „ *numero reale positivo* (. . . . .).
q „ *numero reale positivo, o negativo, o nullo.*
Np „ *numero primo.*
N_0, R_0, Q_0, per indicare le classi N, R, Q, agli individui delle quali si unisca lo zero.

Nx, ove x è un numero intero, per indicare, *multiplo di x;* cioè indichiamo con Nx la classe i cui individui sono $1x$, $2x$, $3x$ ... prodotti per x degli individui di N.

Con i segni ora introdotti e il segno ϵ, scriviamo sotto la forma simbolica seguente le prop.

$$2 \epsilon \mathrm{N}; \quad 3/4 \epsilon \mathrm{R}; \quad \pi \epsilon \mathrm{Q}^{(1)}; \quad \sqrt{2} \epsilon \mathrm{q}; \quad 7 \epsilon \mathrm{Np}; \quad 12 \epsilon \mathrm{N6}$$

che si leggono " 2 è un numero intero positivo; 3/4 è un razionale positivo; il rapporto della circonferenza al diametro è un numero reale positivo; $\sqrt{2}$ è un numero reale; 7 è un numero primo; 12 è un multiplo di 6.

I segni N, R, Q ..... possono esser considerati come abbreviazioni dei nomi delle classi corrispondenti.

*
* *

Scriveremo il segno $\supset$ al posto di *si dedùce.* Scrivendo p. es.

$$(1) \qquad x \epsilon \mathrm{N} . \supset . x(x+1)(x+2) \epsilon \mathrm{N6}$$

leggiamo in uno qualunque dei modi seguenti: " Se x è un numero intero *si deduce* che $x(x+1)(x+2)$ è un multiplo di 6 ": " Se x è un numero intero, *allora avremo che*..... ": " Se x è un numero intero, *sarà* $x(x+1)(x+2)$ un multiplo di 6 ": " Qualunque sia il numero intero x, avremo che, ... ": " Sia x un numero intero, avremo che..... ": " Dato il numero intero x avremo che..... ". Esprimiamo con la (1) in simboli la nota prop. " *Il prodotto di tre numeri interi consecutivi è un multiplo di 6* ".

---

(1) $\pi = 3,141592$... rapporto della circonferenza al diametro.

Della prop. (1) diciamo che $x \varepsilon \mathrm{N}$ è l'*ipotesi*, e $x(x+1)(x+2) \varepsilon \mathrm{N}6$ è la *tesi;* il segno $\supset$ è il *segno di deduzione.* Nella (1), abbiamo fatto precedere e seguire il $\supset$ da un punto per separare i tre segni $x \varepsilon \mathrm{N}$, $\supset$, $x(x+1)(x+2) \varepsilon \mathrm{N}6$.

In generale se a, b sono prop. con $a \supset b$, che si legge “ da a si deduce b ”, esprimiamo che “ se è vera a allora b è vera ” o anche “ b è conseguenza di a ”.

***

Indicheremo con ab, abc, ... l'affermazione simultanea delle prop. a e b; a, b e c; ..... Volendo, p. es., affermare che 3 e 7 sono numeri primi scriviamo $3 \varepsilon \mathrm{Np} . 7 \varepsilon \mathrm{Np}$ e separiamo con un punto le due prop. semplici $3 \varepsilon \mathrm{Np}$, $7 \varepsilon \mathrm{Np}$.

Analogamente scrivendo $11 \varepsilon \mathrm{Np} . 13 \varepsilon \mathrm{Np} . 17 \varepsilon \mathrm{Np}$ affermiamo simultaneamente che 11, 13, 17 sono numeri primi.

***

Volendo affermare simultaneamente che x, y, z, ... sono individui di una classe u, scriveremo $x, y, z, ... \varepsilon u$ in luogo del complesso di segni $x \varepsilon u . y \varepsilon u . z \varepsilon u$..... Il segno $x, y, z, ... \varepsilon u$ si legge “ x, y, z, ... sono individui della classe u ”.

Col complesso di segni

$$x, y \varepsilon \mathrm{q} . \supset . (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

esprimiamo “ Se x e y sono numeri reali, allora avremo che il quadrato di $x+y$ è eguale al quadrato di x, più il doppio prodotto di x per y, più il quadrato di y ”.

Analogamente si hanno le prop.

$$x, y \in \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \log(xy) = \log x + \log y$$
$$x, y \in \mathrm{q} \,.\, \supset .\, x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$x, y \in \mathrm{q} \,.\, \supset .\, (x^2 + xy + y^2)(x-y) = x^3 - y^3$$

che esprimono note proposizioni di algebra.

*
* *

Può darsi che nell'ipotesi o nella tesi, o nell'una e nell'altra, si debba porre l'affermazione simultanea di due o più proposizioni; essendo ciascuna di queste separata da un punto, faremo precedere e seguire il segno $\supset$ da un gruppo di due punti. Es.

$$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, x < y : \supset : x/y < (x+z)/(y+z)$$

"Se x, y, z sono numeri interi e x è minore di y, allora il razionale x/y è minore di quello che si ottiene da esso aggiungendo lo stesso numero z ai suoi due termini".

$$x, y \in \mathrm{Q} \,.\, x < y : \supset : (x+y)/2 > \sqrt{xy}$$

"Se x, y sono numeri reali positivi e x è minore di y, allora la media aritmetica dei due numeri, $(x+y)/2$, è maggiore della loro media geometrica, $\sqrt{xy}$".

$$x, y, z, u \in \mathrm{Q} \,.\, x/y < z/u : \supset :$$
$$x/y < (x+z)/(y+u) \,.\, (x+z)/(y+u) < z/u$$

"Se x, y, z, u sono numeri reali positivi, e x/y è minore di z/u, allora avremo che x/y è minore di $(x+z)/(y+u)$ e $(x+z)/(y+u)$ è minore di z/u".

*
* *

Scriveremo quot(x, y) al posto di “ quoto della divisione di x per y ”, e rest(x, y) al posto di “ resto della divisione di x per y ”.

Indichiamo qui con quot(x, y) il più grande dei numeri interi z tali che $yz \overline{\overline{<}} x$, e quindi con rest$(x, y)$ il numero $x - y \times$ quot(x, y). Il numero indicato con quot(x, y) è ciò che, ordinariamente, si suol chiamare *quoziente incompleto* di x per y.

Abbiamo, p. e., le prop.

$$x, y \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{N}y :\supset: \mathrm{quot}\,(x, y) = x/y$$

“ Se il numero intero x è multiplo del numero intero y, allora il quoto di x per y è eguale al razionale x/y ”.

Mentre trascurando l'ipotesi $x \in \mathrm{N}y$ si ha

$$x, y \in \mathrm{N} \,.\supset.\, x/y = \mathrm{quot}\,(x, y) + \mathrm{rest}\,(x, y)/y.$$

Altri esempi.

$$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{N}z :\supset: \mathrm{quot}(x+y, z) = \mathrm{quot}(x, z) + \mathrm{quot}(y, z)$$

“ Se x, y, z sono numeri interi e x è un multiplo di z, allora il quoto di $x + y$ per z è eguale al quoto di x per z più il quoto di y per z ”.

$$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, x > y \,.\, x - y \in \mathrm{N}z :\supset: \mathrm{rest}\,(x, z) = \mathrm{rest}\,(y, z)$$

“ Se la differenza dei numeri x e y è multipla di z, allora dividendo x e y per z si ottengono resti eguali ”.
La traduzione letterale dei simboli può farla il lettore per esercizio.

*
* *

=

Quando per la prop. $a \supset b$ è vera l'affermazione simultanea $a \supset b \,.\, b \supset a$, diremo che a *è equivalente a* b e scriveremo $a = b$.

Restando sottintesa l'ipotesi $x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, x > y$, abbiamo che se $x - y$ è un multiplo di z, allora $\mathrm{rest}\,(x, z) = \mathrm{rest}(y, z)$: e viceversa; se $\mathrm{rest}\,(x, z) = \mathrm{rest}\,(y, z)$ allora $x - y$ è un multiplo di z. Sono vere cioè le due prop.

$$x - y \in \mathrm{N}z \,.\supset.\, \mathrm{rest}\,(x, z) = \mathrm{rest}\,(y, z)$$
$$\mathrm{rest}\,(x, z) = \mathrm{rest}\,(y, z) \,.\supset.\, x - y \in \mathrm{N}z$$

Possiamo quindi affermare che la prop. $x - y \in \mathrm{N}z$ è equivalente alla prop. $\mathrm{rest}\,(x, z) = \mathrm{rest}\,(y, z)$. Rimettendo l'ipotesi soppressa, abbiamo la prop.

$$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, x > y \,:\supset:\, x - y \in \mathrm{N}z \,.=.\, \mathrm{rest}\,(x, z) = \mathrm{rest}\,(y, z)$$

che può leggersi " Se x, y, z sono numeri e x è maggiore di y, allora avremo che; dire che $x - y$ è un multiplo di z *equivale a dire che*, $\mathrm{rest}\,(x, z) = \mathrm{rest}\,(y, z)$ ".

Analogamente abbiamo

$$x, y \in \mathrm{N} \,:\supset:\, x < y \,.=.\, \mathrm{quot}\,(x, y) = 0$$

" Se x, y sono numeri interi, allora; dire che x è minore di y equivale a dire che $\mathrm{quot}\,(x, y)$ è eguale a zero ".

*
* *

Se con $\mathrm{D}\,(x, y)$ indichiamo la frase " massimo divisore di x e y ", possiamo, mediante tale segno, tradurre in simboli la frase " x è primo con y ". È infatti noto che se x è primo con y allora $\mathrm{D}\,(x, y) = 1$: e viceversa; se $\mathrm{D}\,(x, y) = 1$, allora x è primo con y. Le due prop. " x è

primo con y „ “ $\mathrm{D}(x, y) = 1$ „ sono dunque equivalenti e possiamo alla prima sostituire la seconda.

La prop., p. e.,

$$x, y \in \mathrm{N} \,.\, z \in \mathrm{N}x \,.\, z \in \mathrm{N}y \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1 : \supset : z \in \mathrm{N}xy$$

si può leggere “ Se un numero z è multiplo di altri due x, y e questi sono primi tra loro ($\mathrm{D}(x, y) = 1$), allora z è un multiplo del prodotto xy „.

$$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, xy \in \mathrm{N}z \,.\, \mathrm{D}(x, z) = 1 : \supset : y \in \mathrm{N}z$$

“ Se un prodotto è multiplo di un numero z, e uno dei fattori è primo con z, allora, l'altro fattore è un multiplo di z „.

$$x, y, z \in \mathrm{N} \therefore \supset \therefore \mathrm{D}(x, z) = 1 \,.\, \mathrm{D}(y, z) = 1 : = : \mathrm{D}(xy, z) = 1$$

“ Dire che due numeri sono primi col numero z equivale a dire che il loro prodotto è primo col numero z „.

In questa prop. si è fatto precedere e seguire il segno $\supset$ da un gruppo di *tre* punti, essendosi adoperato il gruppo di *due* punti per separare le due prop. equivalenti, dal segno $=$.

$$x, y, z \in \mathrm{N} : \supset : x, y \in \mathrm{N}z \,.=.\, \mathrm{D}(x, y) \in \mathrm{N}z$$

“ Dire che due numeri sono multipli di un numero z, equivale a dire che il massimo divisore di questi numeri è un multiplo di z „, o in altri termini “ Se un numero ne divide altri due divide il loro massimo divisore e viceversa „.

Scrivendo $\mathrm{m}(x, y)$ al posto di *minimo multiplo di x e y*, abbiamo, p. e., le prop.

$$y \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{N}y : \supset : \mathrm{m}(x, y) = x$$

$$x, y \in \mathrm{N} : \supset : \mathrm{D}(x, y) = 1 \,.=.\, \mathrm{m}(x, y) = xy$$

$$x, y \in \mathrm{N} \,.\supset.\, xy = \mathrm{D}(xy) \times \mathrm{m}(x, y)$$

che il lettore può tradurre nel linguaggio comune per esercizio.

***

Scriveremo il segno $\cup$ al posto della parola *o*.

Se a, b sono prop., scrivendo $a \cup b$, affermiamo che è vera una almeno delle prop. a, b, e non escludiamo che possano essere vere insieme.

Per l'affermazione simultanea di a e b abbiamo fatto uso del segno ab. Si scriverà in seguito anche $a \cap b$ e il segno $\cap$ si leggerà *e*.

Volendo tradurre in simboli la prop. " Se il prodotto di due numeri è nullo, allora uno almeno dei fattori è nullo ", scriviamo

$$x, y \in \mathrm{q} \,.\, xy = 0 : \supset : x = 0 \,.\, \cup \,.\, y = 0$$

e leggiamo " Se x, y sono numeri reali e $xy = 0$, allora avremo che x è eguale a zero, o y è uguale a zero ".

$$x, y \in \mathrm{N} \,.\, z \in \mathrm{Np} \,.\, xy \in \mathrm{N}z : \supset : x \in \mathrm{N}z \,.\, \cup \,.\, y \in \mathrm{N}z$$

" Se il prodotto dei numeri x e y è multiplo del numero primo z, allora, o x è un multiplo di z o y è un multiplo di z ", o in altri termini " Se un numero primo divide un prodotto, divide uno almeno dei fattori ".

***

Scriveremo il segno - al posto della parola *non*. Se a è una prop. con $- a$ indichiamo la sua negazione. Così per $-(x \in \mathrm{N})$ si legge " non è vero che x è un numero intero ".

In luogo del segno $-(x \in u)$, se u è una classe, scriviamo $x - \in u$ e leggiamo " x non è un u ".

In luogo del segno $-(a = b)$, se a, b sono prop., scriviamo $a - = b$ e leggiamo “ a non è equivalente a b „.

Se x, y sono numeri interi, in luogo dei segni $-(x = y)$, $-(x > y)$, $-(x < y)$, scriveremo $x - = y$, $x - > y$, $x - < y$ e leggeremo “ x non è eguale ad y „, “ x non è maggiore di y „, “ x non è minore di y „.

$$x, y \epsilon \mathrm{N} . x - \epsilon \mathrm{N}y : \supset : \mathrm{rest}\,(x, y) \epsilon \mathrm{N}$$

“ Se x non è un multiplo di y, allora il resto di x per y è un numero „.

$$x \epsilon \mathrm{N} . y \epsilon \mathrm{Np} . x - \epsilon \mathrm{N}y : \supset : \mathrm{D}\,(x, y) = 1$$

“ Ogni numero primo, è primo con tutti numeri che non sono suoi multipli „.

$$x \epsilon \mathrm{N} . y \epsilon \mathrm{Np} . x - \epsilon \mathrm{N}y : \supset : x^{y-1} - 1 \epsilon \mathrm{N}y$$

“ Se il numero x non è un multiplo del numero primo y, allora $x^{y-1} - 1$ è un multiplo di y „.

$$x, y \epsilon \mathrm{q} \therefore \supset \therefore x - = y : = : x > y . \cup . x < y$$
$$x, y \epsilon \mathrm{q} \therefore \supset \therefore x = y : = : x - > y . x - < y$$

“ Dire che x non è eguale ad y, equivale a dire che, x è maggiore di y, o, x è minore di y „. “ Dire che x è eguale ad y, equivale a dire che, x non è maggiore di y e x non è minore di y „.

*
* *

Dei segni che abbiamo finora introdotti parte, come i segni N, $\mathrm{N_0}$, R, Q, q, Np, quot, rest, D, m, appartengono insieme ai segni $+$, $-$, $=$, $>$, $<$ alla matematica. Gli altri segni ϵ, $\supset$, $=$, $\cap$, $\cup$, $-$, appartengono alla *logica*.

Per mezzo di quest'ultimi e dei segni proprî di una determinata scienza, possiamo esprimere tutte le proposizioni della scienza stessa. In ciò che precede abbiamo dato qualche esempio di prop. d'aritmetica e algebra, espresso mediante gli indicati segni di logica, ma non ci siamo occupati delle leggi alle quali questi segni soddisfano. Faremo lo studio di queste leggi nei capitoli seguenti, adoperando il poco materiale introdotto fin qui per portare degli esempi che aiutino il lettore a intendere i concetti astratti della logica.

Capitolo II.

Il Raziocinio.

§ 1. — Le proposizioni primitive.

Le lettere $a, b, c, \ldots$ indicano proposizioni qualunque.

Scriviamo il segno $\supset$ al posto della frase *si deduce*, e scrivendo $a \supset b$ leggiamo *da a si deduce b*. Esprimiamo con queste parole ciò che si esprime anche con le frasi "b è conseguenza di a", "se a è vera allora anche b è vera".

Indichiamo con $abc \ldots$ l'*affermazione simultanea* delle prop. $a, b, c, \ldots$

Il segno ab si legge a e b, o anche, è vera a ed è vera b.

Scrivendo abc indichiamo l'affermazione simultanea di ab e di c, scrivendo $a(bc)$ indichiamo l'affermazione simultanea di a e bc.

Ammettiamo che $a \supset b$ e ab sono proposizioni.

Si hanno le proposizioni

1. $a \supset a$
2. $a \supset aa$
3. $ab \supset a$
4. $ab \supset ba$
5. $abc \supset a(bc)$.

Le prop. 1 - 3 si leggono " da a si deduce a ", " da a si deduce a ed a ", " da a e b si deduce a ". Esprimiamo così che si passa da un sistema di prop. ad un'altra che ne è conseguenza, repetendo il sistema (prop. 1), o ripetendolo più volte (prop. 2) o sopprimendo qualche prop. del sistema (prop. 3).

Le prop. 4, 5 si leggono " da a e b si deduce b ed a " " da ab e c si deduce a e bc ". Esprimiamo così che in un sistema di due prop. si può cambiare l'ordine, e in un sistema di tre prop. si può cambiare il modo d'aggruppamento. Proprietà, che sono, come vedremo, conseguenze di queste si adoperano p. es. in algebra, quando da un sistema di equazioni passiamo ad un sistema equivalente o semplicemente conseguenza del primo.

Al complesso di segni $a \supset b$ daremo il nome *deduzione*, e diremo che a è il *primo membro* o l'*ipotesi*, e b il *secondo membro* o la *tesi* della deduzione.

All'affermazione simultanea (*o congiunzione*) abc ... daremo il nome *prodotto logico* e diremo che $a, b, c, ...$ sono i fattori del prodotto.

Separeremo i fattori di un prodotto e i membri di una deduzione con un punto o con un gruppo di due, tre, ... punti. I punti fanno ufficio analogo alle parentesi.

Scrivendo p. es. $a . b \supset c$ indichiamo il prodotto di a per $b \supset c$; scrivendo $a . b : \supset : c$ indichiamo la medesima cosa indicata dal segno $ab \supset c$. Scrivendo $a . b \supset c : \supset : d$ leggiamo " se è vera a, e da b si deduce c, allora si deduce d ", cioè $a . b \supset c$ è l'ipotesi e d la tesi della deduzione.

Una deduzione, come la precedente, può contenere due

o più segni $\supset$. Quello fra i segni $\supset$ che separa l'ipotesi dalla tesi sarà preceduto e seguito, o solo preceduto o solo seguito, dal gruppo di punti che contiene il massimo numero di punti. Così p. es., col complesso di segni,

$$a \,.\, b : \supset : c \,\therefore\, d \supset e :: \supset :: f : \supset : g \,.\, h$$

indichiamo la deduzione che ha per ipotesi il prodotto della prop. $ab \supset c$, per la prop. $d \supset e$, e per tesi la prop. $f \supset gh$.

* * *

Abbiamo ancora le proposizioni

6. $a \,.\, a \supset b : \supset : b.$
7. $a \supset b \,.\, \supset \,.\, ac \supset bc.$
8. $a \supset b \,.\, b \supset c : \supset : a \supset c$
9. $b \,.\, \supset \,.\, a \supset ab.$

La prop. 6 si legge “ Se è vera a, e da a si deduce b, allora avremo che b è vera ”. È questa, in sostanza, la traduzione in simboli, di uno dei modi con i quali si è detto che si può leggere il segno $a \supset b$.

La prop. 7 esprime che si possono moltiplicare i due membri di una deduzione per una stessa proposizione.

La prop. 8 esprime la forma di ragionamento nota sotto il nome *sillogismo*. Rappresenta un modo di eliminazione della prop. b, nell'affermazione simultanea delle deduzioni $a \supset b$, $b \supset c$.

La prop. 9 si legge “ Se b è vera, allora, da a si deduce ab ”.

* * *

Le prop. 1-9 ora enunciate, rappresentano i più semplici metodi di dimostrazione o di deduzione; altri me-

todi, che studieremo in seguito, possono esser ottenuti dai precedenti.

Le prop. 6 - 9 rappresentano modi di raziocinio già più importanti di quelli espressi dalle prep. 1 - 5.

Le prop. 1 - 9 enunciate non possono essere dimostrate ricorrendo a concetti più semplici di quelli espressi dalle prop. stesse. Le ammettiamo come vere e le chiamiamo *proposizioni primitive*.

Nei §§ seguenti dedurremo da queste prop. (e da altre due che introduremo nel § 7), dei metodi di raziocinio che ci permettono di passare rapidamente da una prop. ad un'altra.

Scriveremo i segni P, Pp, Hp, Ts un luogo delle parole, *proposizione*, *proposizione primitiva*, *ipotesi*, *tesi*.

§ 2. — Polisillogismo.

Se A è una prop. formata con le prop. $a, b, c, ...$, col segno $\begin{pmatrix} a', b', c', ... \\ a, b, c, ... \end{pmatrix}$ A indicheremo, ciò che diviene A quando al posto della prop. a si pone la prop. a', al posto di b, b', al posto di c, c'. Così, p. e., il segno $\begin{pmatrix} ab \\ a \end{pmatrix}$ Pp1 è identico al segno $ab \supset ab$, che si ottiene appunto dalla Pp1 sostituendo ad a l'affermazione simultanea ab.

Le lettere a, b, c che compariscono nelle Pp, rappresentano prop. qualunque, quindi sono vere le prop. che dalle Pp si ottengono sostituendo ad a, b, c delle prop. speciali.

anche in un segno a'/a b'/b ecc

*
* *

1. $ba \supset ab$ $\left(\begin{matrix} b, & a \\ a, & b \end{matrix}\right)$ Pp4

2. $aa \supset a$ $\left(\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right)$ Pp3

3. $ab \,.\, ab \supset c : \supset : c$ $\left(\begin{matrix} ab, & c \\ a, & b \end{matrix}\right)$ Pp6

Le prop. ora scritte si ottengono dalle Pp 3, 6 facendo le sostituzioni che sono indicate dal complesso di segni posto a destra di ciascuna prop.

La P1 esprime che dall'affermazione simultanea di b e a si duduce l'affermazione simultanea di a e b. Esprime la medesima cosa della Pp 4.

La P2 dice che, affermata due volte una prop. si può anche affermarla una volta sola. Si può notare che la prop. 2 si ottiene dalla Pp 2 scambiando in questa l'Hp con la Ts.

La P3 si legge " Se è vera a, ed è vera b, e se da ab si deduce c, allora avremo che c è vera „. Questa prop. differisce poco dalla Pp 6; ci dice solo che la a della Pp 6 può anche essere l'affermazione simultanea di due (o anche più, come è facile dimostrare) prop. vere.

*
* *

Sostituiamo nella Pp 8, ad a, b, c, rispettivamente le prop. ab, ba, b, si ottiene la prop.

$$ab \supset ba \,.\, ba \supset b : \supset : ab \supset b,$$

ovvero facendo uso del segno di sostituzione

$$\text{(1)} \qquad \text{Pp4} \,.\, \left(\begin{matrix} b, & a \\ a, & b \end{matrix}\right) \text{Pp3} : \supset : ab \supset b$$

L'Hp di questa prop. è il prodotto logico di due prop. vere, quindi per la P3 anche la Ts della (1) è una prop. vera. Possiamo dunque affermare la prop. $ab \supset b$, che è la Ts della (1), e ritenere la prop. (1) come la *dimostrazione* di questa prop.

Per indicare che la (1) si è ottenuta con sostituzione nella Pp 8, scriveremo

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} ab, & ba, & b \\ a, & b, & c \end{pmatrix} \mathrm{Pp8} \therefore \supset \therefore \mathrm{Pp4} \, . \begin{pmatrix} b, & a \\ a, & b \end{pmatrix} \mathrm{Pp3} : \supset : ab \supset b$$

o anche, sopprimendo il primo segno di sostituzione che si riduce all'indicazione di un'operazione materiale

$$(3) \qquad \mathrm{Pp8} \therefore \supset \therefore \mathrm{Pp4} \, . \begin{pmatrix} b, & a \\ a, & b \end{pmatrix} \mathrm{Pp3} : \supset : ab \supset b$$

La (2) è identica alla Pp 1 ($a \supset a$) poichè i due segni a destra e a sinistra del segno $\therefore \supset \therefore$ sono, per definizione, identici. La forma (3) deve esser considerata come un'*abbreviazione* della forma (2). Le forme (2), (3) differiscono dalla (1) solo perchè contengono l'indicazione di un'operazione materiale che è soppressa nella (1).

Nelle dimostrazioni noi faremo uso di una qualunque delle tre forme ora indicate, forme che applichiamo alle dimostrazioni delle seguenti prop.

***

4. $ab \supset b$ $\quad$ $\left[\mathrm{Pp8} \therefore \supset \therefore \mathrm{Pp4} \, . \begin{pmatrix} b, & a \\ a, & b \end{pmatrix} \mathrm{Pp3} : \supset : \mathrm{P4}\right]$

5. $a \supset b \, . \, a : \supset : b$

$$\left[\mathrm{Pp8} \therefore \supset \therefore \begin{pmatrix} a \supset b, & a \\ a\ , & b \end{pmatrix} \mathrm{Pp4} \, . \, \mathrm{Pp6} : \supset : \mathrm{P5}\right]$$

(α). $a \supset b . b \supset c . c \supset d : \supset : a \supset c . c \supset d$
[Pp7 : $\supset$: Pp8 . $\supset$. (α)]

I. $a \supset b . b \supset c . c \supset d : \supset : a \supset d$
[(α) . Pp8 : $\supset$: PI]

(β). $a \supset b . b \supset c . c \supset d . d \supset e : \supset : a \supset d . d \supset e$
[Pp7 : $\supset$: PI . $\supset$. (β)]

I_1. $a \supset b . b \supset c . c \supset d . d \supset e : \supset : a \supset e$
[(β) . Pp8 : $\supset$: PI_1]

Le dimostrazioni sono state racchiuse tra parentesi quadre [ ] e poste a destra o sotto la prop. corrispondente.

Per le PI, I_1, si è fatto uso della forma (1) di dimostrazione precedentemente indicata, per le altre della forma (3). Il lettore può riconoscere facilmente quali sono le sostituzioni fatte nelle Pp 8, 7.

La P 4 differisce dalla Pp 3 per la sola tesi. La P 4 e la Pp 3 ci esprimono che “ dall'affermazione simultanea di due prop. si può dedurre una qualunque delle due prop. „.

La P 5 si è ottenuta dalla Pp 6 invertendo i fattori dell'ipotesi (il che può farsi per la Pp 4) e applicando poi il sillogismo. Si è cioè per mezzo della Pp 4 ottenuta la prop. $a \supset b . a : \supset : a . a \supset b$; presa poi questa e la Pp 6 come premesse di un sillogismo, si è ottenuta, come conseguenza, la P 5.

La P(α) si è ottenuta dalla Pp 8 moltiplicando i suoi due membri (Pp 7) per la prop. $c \supset d$. La PI è la conseguenza di un sillogismo che ha più premesse (α) e la prop. $a \supset c . c \supset d : \supset a \supset d$, (Pp 8). Le medesime osservazioni valgono per le prop. (β), I.

***

La PI da un metodo di ragionamento analogo al sillogismo e che è noto sotto il nome di *Polisillogismo* o *Sorite*.

Il prodotto logico seguente (in generale di un numero *finito* di fattori).

(1) $$a \supset b \,.\, b \supset c \,.\, c \supset d \,.\, d \supset e \,.\, e \supset f$$

si chiama *catena di deduzioni.* I fattori della catena sono deduzioni tali che, una qualunque di esse, l'ultima esclusa, ha per Ts l'Hp della seguente.

La PI esprime che da una catena di deduzioni di tre fattori si deduce la prop. che ha per Hp e Ts gli estremi della catena. La PI_1 esprime la medesima cosa per una catena di quattro deduzioni. È facile comprendere che il polisillogismo può essere dimostrato vero per una catena di 5, 6, ... fattori.

Per semplicità di scrittura, almeno nelle dimostrazioni in simboli, scriveremo il segno

$$a \supset b \supset c \supset d \supset e \supset f$$

al posto del prodotto (1).

***

Con i numeri Romani I, II, ... indicheremo proposizioni, o gruppi di proposizioni che esprimono metodi generali e importanti di calcolo logico; per le altre prop. continueremo la numerazione arabica già incominciata. — Converremo che il segno I indichi il Sillogismo e il Polisillogismo.

§ 3. — Altra forma di dimostrazione simbolica.

(α). $c \,.\supset.\, a \supset ac$ $\qquad \binom{c}{b}$ Pp9

(β). $c \,.\, ac \supset bc : \supset : a \supset ac \,.\, ac \supset bc$ $\qquad$ [Pp7 $: \supset :$ (α) $. \supset .$ (β)]

(γ). $c \,.\, ac \supset bc : \supset : a \supset bc$ $\qquad$ [(β) . Pp8 $: \supset :$ (γ)]

(δ). $a \supset b \,.\, c : \supset : ac \supset bc \,.\, c$ $\qquad$ [Pp7 $: \supset :$ (δ)]

(ε). $a \supset b \,.\, c : \supset : c \,.\, ac \supset bc$ $\qquad$ [Pp8 $\therefore \supset \therefore$ (δ) . Pp4 $: \supset :$ (ε)]

6. $a \supset b \,.\, c : \supset : a \supset bc$ $\qquad$ [(ε) . (γ) $: \supset :$ P6]

La (α) si ottiene dalla Pp9 cambiando b in c.

La (β) si ottiene da (α) moltiplicando i suoi due membri per la prop. $ac \supset bc$.

Per il sillogismo si ottiene la prop. $a \supset ac \,.\, ac \supset bc : \supset : a \supset bc$; presa questa e la (β) come premesse di un sillogismo si ottiene (γ).

La (δ) si ottiene dalla Pp7 moltiplicando per c i suoi due membri; la (ε) dalla (δ) invertendo i fattori della Ts di questa (Pp4) e applicando il sillogismo.

Infine la P6 è la conseguenza del sillogismo che ha per premesse le prop. (ε), (γ).

***

La P6 si legge " se da a si deduce b ed è vera la prop. c, allora da a si deduce bc ". In altri termini

Si può moltiplicare la tesi di una deduzione vera per una proposizione vera.

Questa proprietà ci permette di scrivere le dimostrazioni sotto una forma semplicissima.

Proponiamoci p. e. di dimostrare la prop.

$$(1) \qquad a \supset b \,.\, c : \supset : a \supset cb$$

che differisce dalla P6 solo per l'ordine dei fattori b, c nella Ts.

Scriveremo la dimostrazione simbolica sotto la forma

$$(2) \qquad [\mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P6} : \supset : a \supset bc \,.\, bc \supset cb \,.\, \mathrm{Pp8} : \supset : \mathrm{Ts}]$$

e leggiamo " Dall'*ipotesi* (della (1), sottinteso) si deduce che da $a \supset bc$ e $bc \supset cb$; da questo e dalla Pp8, cioè per il sillogismo, si deduce la *tesi* (della (1), sottinteso) ".

Ecco come si è ottenuta questa forma.

Per mezzo di sostituzioni nella Pp6 si ha

$$a \supset b \,.\, c \therefore a \supset b \,.\, c : \supset : a \supset bc :: \supset :: a \supset bc$$

(si è sostituito ad a, b, le prop. $a \supset b \,.\, c$, $a \supset bc$) ovvero sotto forma più semplice

$$\mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P\,6} : \supset : a \supset bc$$

Moltiplicando (P 6) la Ts di questa per la prop. vera $bc \supset cb$, si ha la prop. vera

$$\mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P6} : \supset : a \supset bc \,.\, bc \supset cb$$

La Ts di questa può essere ancora moltiplicata per la Pp8 nella quale ad a, b, c si sostituisce a, bc, cb, e si ha

$$(3) \ \mathrm{Hp}.\mathrm{P6} :: \supset :: a \supset bc \,.\, bc \supset cb \therefore a \supset bc \,.\, bc \supset cb : \supset : a \supset cb,$$

e sotto forma abbreviata, come in (2), sopprimendo l'indicazione della sostituzione,

$$(3') \qquad \mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P6} : \supset : a \supset bc \,.\, bc \supset cb \,.\, \mathrm{Pp8}$$

Dalla Pp6 abbiamo, con convenienti sostituzioni,

(4) $a \supset bc \,.\, bc \supset cb \therefore a \supset bc \,.\, bc \supset cb : \supset : a \supset cb :: \supset :: a \supset cb$

Il prodotto logico delle (3), (4) per le convenzioni fatte nel § precedente è indicato dal segno (2).

Ecco ora come può assumersi il segno (2) quale dimostrazione della prop. (1). Per quanto si è detto, il segno (2) è il prodotto logico delle premesse di un sillogismo che ha come conseguenza la prop.

(5) $$\mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P6} : \supset : \mathrm{Ts}$$

Ora dalla Pp1 si ha che Hp . ↄ . Hp e dalla P6 che

(6) $$\mathrm{Hp} : \supset : \mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P6}$$

Prese le prop. (6), (5) come premesse di un sillogismo si ha come conseguenza la prop. Hp . ↄ . Ts, cioè la prop. (1).

Nel segno (2) quest'ultima parte della dimostrazione resta sottintesa.

Ripetiamo la prop. (1), insieme ad altre che si dimostrano in modo analogo.

* * *

P7. 7. $a \supset b \,.\, c : \supset : a \supset cb$
[Hp . P6 : ↄ : $a \supset bc \,.\, bc \supset cb$. PI : ↄ : Ts]

P8. 8. $a \supset b \,.\, \supset .\, ac \supset cb$
[Hp . Pp7 : ↄ : $ac \supset bc \,.\, bc \supset cb$. PI : ↄ : Ts]

P9. 9. $a \supset b \,.\, \supset .\, ca \supset cb$
[Hp . P8 : ↄ : $ca \supset ac \,.\, ac \supset cb$. PI : ↄ : Ts]

P10. 10. $b \,.\, \supset .\, a \supset ba$
[Hp . Pp9 : ↄ : $a \supset ab \,.\, ab \supset ba$. PI : ↄ : Ts]

11. $a \supset b \,.\supset.\, a \supset ab$
   [$Hp \,.\, Pp7 : \supset : a \supset aa \,.\, aa \supset ab \,.\, PI : \supset : Ts$]

12. $a \supset b \,.\, a \supset c : \supset : a \supset bc$
   [$Hp : \supset : a \supset ab \,.\, a \supset c : \supset : a \supset ab \,.\, ab \supset bc \,.\, Pl : \supset : Ts$]

13. $a(bc) \supset abc$
   [$Hp \,.\, Pp4 : \supset : (bc)a \,.\, Pp5 : \supset : b(ca) \,.\, Pp4 : \supset : (ca)b \,.$
   $Pp5 : \supset : c(ab) \,.\, Pp4 : \supset : Ts$]

Nelle dimostrazioni al posto di Pp8, abbiamo sempre messo PI, rappresentandoci questa, per le convenzioni fatte, il metodo generale di ragionamento polisillogismo, che comprende anche il sillogismo (Pp8).

Le P8, 9 differiscono dalla Pp7 per l'ordine nel quale sono scritti i fattori dei prodotti *ac*, *bc*. La P9, p. es., si ottiene così dalla P8: si moltiplica la Ts di questa (a sinistra, P7) per la prop. vera $ca \supset ac$ e si ha la prop. $a \supset b : \supset : ca \supset ac \,.\, ac \supset cb$; da questa per il sillogismo e la P6 si ha la P9. La forma di dimostrazione ora introdotta è basata sulla P6; nella dimostrazione della P9 si è presa come base la P7. Lasciando ancora la P6 si formerebbe una catena di deduzioni con un fattore di più, e si avrebbe

$$[Hp \,.\, P8 : \supset : ac \supset cb \,.\, ca \supset ac \,.\, Pp4 : \supset :$$
$$ca \supset ac \,.\, ac \supset cb \,.\, Pp8 : \supset : Ts]$$

La P10 è la Pp9 nella quale al posto di *ab* si è posto *ba*.

La P12 esprime che " ottenute due deduzioni che hanno la medesima Hp, allora si può affermare la deduzione che ha la medesima Hp e per Ts il prodotto delle tesi delle due deduzioni ". Vedremo in seguito che questo metodo di raziocinio è caso particolare di un altro. Nella dimostrazione della P12 la prima deduzione si è ottenuta moltiplicando i due membri della P11 per $a \supset c$· la se-

conda moltiplicando i due membri della prop. $a \supset c . \supset . ab \supset bc$ (P8) per $a \supset ab$; la terza come quelle delle precedenti dimostrazioni.

Useremo spesso nel § seguente la forma di dimostrazione adoperata per la P12; tale forma differisce un poco nelle prime deduzioni dalle forme di dimostrazione delle precedenti proposizioni, mancando le indicazioni dei metodi di raziocinio che permettono di effettuare le successive deduzioni. Si osservi però che i metodi sottintesi sono sempre quelli indicati dalla Pp7 e dalle P8, 9. Il metodo di raziocinio che indicheremo nel § 6 ci permetterà di rendere materialmente più chiara la forma della dimostrazione simbolica.

La P13 è la Pp5 nelle quali si è cambiato di posto l'ipotesi e la tesi.

§ 4. — Far entrare un fattore nell'ipotesi, o uscire un fattore dall'ipotesi.

La prop. " se un numero divide il prodotto di altri due ed è primo con uno di questi, allora divide l'altro fattore ", può, ricordando quanto si è detto nel Cap. I, tradursi in simboli in uno dei due modi seguenti

(1) $x, y, z \epsilon \mathrm{N} \therefore \supset \therefore yz \epsilon \mathrm{N}x . \mathrm{D}(x, y) = 1 : \supset : z \epsilon \mathrm{N}x$

(2) $x, y, z \epsilon \mathrm{N} : yz \epsilon \mathrm{N}x . \mathrm{D}(x, y) = 1 \therefore \supset \therefore z \epsilon \mathrm{N}x$

La (1) si legge " se x, y, z sono numeri interi, allora avremo che; se il prodotto yz è multiplo di x, e x è primo con y, allora z è multiplo di x ".

La (2) si legge " se x, y, z sono numeri interi, e yz è

multiplo di x e x è primo con y, allora avremo che z è multiplo di x „.

Si può indifferentemente passare dall'una all'altra delle forme (1), (2).

La prop. (1) è della forma $a . \supset . b \supset c$ " da a si deduce che da b si deduce c „; la (2) è della forma $ab \supset c$. Quando dalla forma $a . \supset . b \supset c$ passiamo alla forma $ab \supset c$ diremo che *si fa entrare un fattore nell'*Hp; quando dalla forma $ab \supset c$ passiamo alla forma $a . \supset . b . \supset c$ diremo che *si fa uscire un fattore dall'*Hp.

Dimostreremo che sono veri i due principî logici seguenti, che indicheremo col segno II.

Si può in una deduzione far entrare un fattore nell'ipotesi.

Si può in una deduzione far uscire un fattore dall'ipotesi.

***

II. $a . \supset . b \supset c : \supset : ab \supset c$

[Hp . Pp7 : : $\supset$: : $ab : \supset : b \supset c . b .\therefore b \supset c . b : \supset : c .\therefore$ Pp8 : : $\supset$: : Ts]

II_1. $ab \supset c : \supset : a . \supset . b \supset c$

[Hp . Pp1 : : $\supset$: : $a . \supset . b \supset ab : ab \supset c$. P6 : : $\supset$: : $a : \supset : b \supset ab . ab \supset c .\therefore b \supset ab . ab \supset c : \supset . b \supset c .\therefore$ PI : : $\supset$: : Ts]

Svilupperemo in parole le dimostrazioni di queste due importanti proposizioni.

(II). Moltiplicando i due membri dell'Hp per la prop. b si ha (Pp7)

$$a . \supset . b \supset c .\therefore \supset .\therefore ab : \supset : b \supset c . b$$

Moltiplicando la Ts di questa per la prop. vera (P5. § 2), $b \supset c . b : \supset : c$, si ha

(1) $$a . \supset . b \supset c :: \supset :: ab : \supset : b \supset c . b \therefore b \supset c . b : \supset : c$$

Dal sillogismo abbiamo

(2) $$ab : \supset : b \supset c . b \therefore b \supset c . b : \supset : c :: \supset :: ab \supset c$$

Prese le (1), (2) come premesse di un sillogismo si ha come conseguenza la PII.

(II_1). Per la Pp1, è vera la prop. $ab \supset c . \supset . ab \supset c$. Moltiplicando (a sinistra) la Ts di questa per la prop. vera $a . \supset . b \supset ab$ (P 10. § 3), si ha

(3) $$ab \supset c :: \supset :: a . \supset . b \supset ab : ab \supset c$$

Applicando la P6, abbiamo

$$a . \supset . b \supset ab : ab \supset c :: \supset :: a : \supset : b \supset ab . ab \supset c$$

e moltiplicando la Ts di questa per la prop. vera $b \supset ab . ab \supset c : \supset : b \supset c$, abbiamo

(4) $$a . \supset . b \supset ab : ab \supset c :: \supset :: a : \supset : b \supset ab . ab \supset c \therefore b \supset ab . ab \supset c : \supset : b \supset c$$

Per il sillogismo abbiamo

(5) $$a : \supset : b \supset ab . ab \supset c \therefore b \supset ab . ab \supset c : \supset : b \supset c :: \supset :: a . \supset . b \supset c$$

Prese le (3), (4), (5) come premesse di un polisillogismo si ha come conseguenza la PII_1.

§ 5. — Equivalenza.

Si definisce un segno, o un complesso di segni x, stabilendo sia identico ad un complesso di segni α avente significato già noto. Es. “Triangolo isoscele„ significa “Triangolo che ha due lati eguali„; “Sfera„, significa “Luogo dei punti equidistanti da un punto dato„; “Numero primo„, significa “Numero intero maggiore di 1 non decomponibile in un prodotto di numeri tutti maggiori di 1„.

Volendo indicare che il segno x ha il medesimo significato del complesso di segni α, scriviamo

$$x =_{\text{Def}} \alpha$$

e leggiamo “*x è identico ad* α„, oppure “*x è uguale, per definizione, ad* α„.

***

Scriveremo il segno $a = b$ al posto della frase “La prop. a *è equivalente* alla prop. b„. Definiremo il complesso dei segni $a = b$, ponendo

$$a = b : =_{\text{Def}} : a \supset b \,.\, b \supset a$$

Cioè, la frase “La prop. a è equivalente alla prop. b„ è identica alla frase “Da a si deduce b e da b si deduce a„.

La prop. $b \supset a$ si chiama l'*inversa* della prop. $a \supset b$. Con la def. precedente stabiliamo dunque di dire che a è equivalente a b, quando è vera la deduzione $a \supset b$ e la sua inversa.

I due segni $a = b$, $a \supset b \,.\, b \supset a$ essendo identici possono in ogni caso esser sostituiti l'uno all'altro.

Chiameremo *equivalenza* il complesso di segni $a = b$, è diremo che a è il *primo* e b il *secondo membro* dell'equivalenza.

Per il segno = valgono le seguenti proposizioni

***

14. $a = b :\supset: a \supset b \,.\, b \supset a$ $\left[\begin{pmatrix} a \supset b \,.\, b \supset a \\ a \end{pmatrix} \text{Pp1}\right]$

15. $a \supset b \,.\, b \supset a :\supset: a = b$ ["]

16. $a = b \,.\supset.\, b = a$ $\left[\begin{pmatrix} a \supset b, & b \supset a \\ a\ , & b \end{pmatrix} \text{Pp4}\right]$

17. $a = b \,.\supset.\, a \supset b$ $\left[\begin{pmatrix} a \supset b, & b \supset a \\ a\ , & b \end{pmatrix} \text{Pp3}\right]$

18. $a = b \,.\supset.\, b \supset a$ $\left[\begin{pmatrix} a \supset b. & b \supset a \\ a\ , & b \end{pmatrix} \text{P4}\right]$

19. $a = b :=: a \supset b \,.\, b \supset a$ $[\text{P14} \,.\, \text{P15} :\supset: \text{P19}]$

20. $a = a$ $[\text{Pp1} :\supset: \text{P20}]$

21. $a = b :=: b = a$ $\left[\text{P16} \,.\, \begin{pmatrix} b, & a \\ a, & b \end{pmatrix} \text{P16} :\supset: \text{P21}\right]$

(α). $a = b \,.\, b = c :\supset: a \supset c$
$[\text{Hp} :\supset: a \supset b \,.\, b = c :\supset: a \supset b \,.\, b \supset c \,.\, \text{PI} :\supset: \text{Ts}]$

(β). $a = b \,.\, b = c :\supset: c \supset a$
$[\text{Hp} :\supset: b = c \,.\, a = b :\supset: c \supset b \,.\, a = b :\supset: c \supset b \,.\, b \supset a \,.\, \text{PI} :\supset: \text{Ts}]$

22. $a = b \,.\, b = c :\supset: a = c$ $[(\alpha) \,.\, (\beta) :\supset: \text{P22}]$

22'. $a = b \,.\, b = c \,.\, c = d :\supset: a = d$
$[\text{Hp} :\supset: a = c \,.\, c = d \,.\, \text{P22} :\supset: \text{Ts}]$

23. $a \,.\supset.\, b \supset c :=: ab \supset c$ $[\text{PII} \,.\supset.\, \text{P23}]$

Le P14, 15 si ottengono dalla Pp1 sostituendo ad a la prop. $a \supset b \,.\, b \supset a$, e nella prop. ottenuta mettendo al posto dell'Hp o al posto della Ts il segno $a = b$.

La P16 esprime che " se a è equivalente a b, allora anche b è equivalente ad a ". Esprimiamo ciò nel linguaggio comune dicendo " a e b *sono* equivalenti ", o anche dicendo che la relazione espressa dal segno $=$ è *simmetrica*.

Le P17, 18 esprimono che dall'affermazione " a è equivalente a b ", si può dedurre che " da a si deduce b " e che " da b si deduce a ".

La P20 esprime che " Ogni prop. è equivalente a se stessa ". Questo è il principio *d'identità*. La P21 esprime che la prop. $a = b$ è equivalente alla prop. $b = a$. Le P22, 23' rappresentano un procedimento di eliminazione analogo al Sillogismo e Polisillogismo.

La P23 esprime che sono equivalenti le prop. che si ottengono l'una dall'altra, facendo entrare un fattore nell'Hp o facendo uscire un fattore dall'Hp.

***

Sappiamo, p. e., che sono vere le prop.

$$(1) \qquad x, y \in \mathrm{N} \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1 : \supset : \mathrm{m}(x, y) = xy$$

$$(2) \qquad x, y \in \mathrm{N} \,.\, \mathrm{m}(x, y) = xy : \supset : \mathrm{D}(x, y) = 1$$

Facendo nelle (1), (2), uscire un fattore dall'Hp si ha

$$(1)' \qquad x, y \in \mathrm{N} : \supset : \mathrm{D}(x, y) = 1 \,.\, \supset \,.\, \mathrm{m}(x, y) = xy$$

$$(2)' \qquad x, y \in \mathrm{N} : \supset : \mathrm{m}(x, y) = xy \,.\, \supset \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1$$

L'affermazione simultanea delle (1)', (2)', dà, per la P12

$$x, y \in \mathrm{N} \,.\!\cdot\,. \supset .\!\cdot\,.$$

$$\mathrm{D}(x, y) = 1 \,.\, \supset \,.\, \mathrm{m}(x, y) = xy : \mathrm{m}(x, y) = xy \,.\, \supset \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1$$

La Ts di questa è il prodotto di una deduzione per la sua inversa, quindi per la def. del segno =

$$x, y \,\epsilon\, \mathrm{N} \therefore \supset \therefore \mathrm{D}(x, y) = 1 \,.\, = .\, \mathrm{m}(x, y) = xy$$

" Dire che il massimo divisore di due numeri è eguale ad 1, equivale a dire che il loro massimo multiplo è eguale al loro prodotto „.

***

In luogo del prodotto logico

(1) $$a = b \,.\, b = c \,.\, c = d \,.\, d = e \,.\, e = f$$

scriveremo il segno

(1)′ $$a = b = c = d = e = f.$$

La (1) e la (1)′ si chiama *catena di equivalenze.*

Le P22, 23 esprimono che " Conseguenza di una catena di equivalenze è l'equivalenza che ha per membri gli estremi della catena „.

Della catena di equivalenze si fa uso, p. es., in algebra quando si trasforma un sistema di equazioni in un altro equivalente, e quello ottenuto in un altro, sino ad ottenere le radici dell'equazione.

Supposto che si faccia uso dei *soli numeri reali positivi*, abbiamo per il sistema di equazioni

$$x^2 + xy = 6 \quad ; \quad y^2 + xy = 3$$

la catena di equivalenze

$$x^2 + xy = 6 \,.\, y^2 + xy = 3 : = : x^2 + 2xy + y^2 = 9 \,.\, x^2 - y^2 = 3$$
$$: = x + y = 3 \,.\, (x + y)(x - y) = 3 :$$
$$= : x + y = 3 \,.\, x - y = 1 : = : x = 2 \,.\, y = 1$$

Conclusione della catena è la prop.

$$x, y \epsilon Q \therefore \supset \therefore x^2 + xy = 6 . y^2 + xy = 3 : = : x = 2 . y = 1$$

che si legge: " Se x, y sono numeri reali positivi, allora il sistema di equazioni $x^2 + xy = 6$, $y^2 + xy = 3$ è equivalente al sistema di equazioni $x = 2$, $y = 1$ ", o in altri termini " le coppie di numeri reali positivi x e y tali che $x^2 + xy = 6$ e $y^2 + xy = 3$, sono anche tali che $x = 2$ e $y = 1$, e viceversa ".

***

Dai metodi di calcolo logico esposti sin qui possiamo dedurre il seguente metodo, generale, che è molto importante.

Se in una prop. A **sostituiamo alle prop.** a, b, c, ... **che la formano, le proposizioni** a', b', c', ..., **rispettivamente equivalenti alle proposizioni** a, b, c, ..., **otteniamo una proposizione equivalente ad** A.

Supposto, p. es., che la sostituzione si faccia nelle tre lettere a, b, c che compariscono nella prop. A, quanto abbiamo detto sopra può esser tradotto così in simboli.

$$\text{III.} \quad a' = a . b' = b . c' = c : \supset : \binom{a', b', c'}{a, b, c} A = A$$

Le prop. che conosciamo sinora (e del resto anche le altre, come vedremo) hanno una delle tre forme ab, $a \supset b$, $a = b$. La PIII sarà dunque dimostrata vera, quando avremo provato che essa è vera per prop. delle forme ora indicate. Ciò facciamo con le formali seguenti

*
* *

24. $a' = a . \supset . a'b = ab$

$[\mathrm{Hp} : \supset : a' \supset a . a \supset a' : \supset : a'b \supset ab . a \supset a' : \supset :$
$a'b \supset ab . ab \supset a'b : \supset : \mathrm{Ts}]$

25. $b' = b . \supset . ab' = ab$

26. $a' = a . b' = b : \supset : a'b' = ab$

$[\mathrm{Hp} : \supset : a'b' = ab' . b' = b : \supset : a'b' = ab' . ab' = ab .$
$\mathrm{P}22 : \supset : \mathrm{Ts}]$

$(\alpha)'$. $a' = a . a' \supset b : \supset : a \supset b$

$[\mathrm{Hp} : \supset : a \supset a' . a' \supset b . \mathrm{PI} : \supset : \mathrm{Ts}]$

(α). $a' = a : \supset : a' \supset b . \supset . a \supset b$ $[(\alpha)' . \mathrm{PII} : \supset : (\alpha)]$

$(\beta)'$. $a' = a . a \supset b : \supset : a' \supset b$

$[\mathrm{Hp} : \supset : a' \supset a . a \supset b . \mathrm{PI} : \supset : \mathrm{Ts}]$

(β). $a' = a : \supset : a \supset b . \supset . a' \supset b$ $[(\beta)' . \mathrm{PII} : \supset : (\beta)]$

27. $a' = a : \supset : a' \supset b . = . a \supset b$ $[(\alpha) . (\beta) : \supset : \mathrm{P}27]$

28. $b' = b : \supset : a \supset b' . = . a \supset b$

29. $a' = a . b' = b : \supset : a' \supset b' . = . a \supset b$

$[\mathrm{Hp} .\therefore \supset .\therefore a' \supset b' . = . a \supset b' : b' = b .\therefore \supset .\therefore a' \supset b' .$
$= . a \supset b' : a \supset b' . = . a \supset b . \mathrm{P}22 : \supset : \mathrm{Ts}]$

30. $a' = a : \supset : a' = b . = . a = b$

31. $b' = b : \supset : a = b' . = . a = b$

32. $a' = a . b' = b : \supset : a' = b' . = . a = b$

Le P 24, 25, 26 dimostrano in tutti i casi possibili la PIII quando A è della forma *ab*. Si può notare che le P 24, 25 possono esser considerate come conseguenze della P 26 e del principio d'identità $a = a$. Le P 27-32 dimostrano la PIII quando A è della forma $a \supset b$ e $a = b$. Nelle P 30-32 non sono state scritte le dimostrazioni perchè analoghe

alle dimostrazioni delle P27-29. Le prop. (α)′, (α), (β)′, (β) servono per dimostrare la P27; la (α)′ si ottiene moltiplicando per $a' \supset b$ i due membri della P18 e applicando poi il sillogismo; la (α) si ottiene da (α)′ facendo uscire un fattore dall'Hp.

Applicheremo in seguito questo importante metodo della sostituzione di prop. equivalenti.

***

Conseguenza importante del metodo di raziocinio III e della Pp6 è il seguente:

Se una proposizione è vera, allora è vera qualunque proposizione ad essa equivalente.

In simboli ciò è espresso dalla formula,

32′. $a \,.\, a = b : \supset : b$
[Hp :: $\supset$ :: $a \,.\, a \supset b \therefore a \,.\, a \supset b : \supset : b \therefore$ PI :: $\supset$ :: Ts]

La P32′ si legge " Se a è vera e a è equivalente a b, allora avremo che b è vera ". La dimostrazione è la seguente: Moltiplicando i due membri della prop. $a = b \,.\supset.\, a \supset b$ per a abbiamo

$$a \,.\, a = b : \supset : a \,.\, a \supset b ;$$

moltiplicando la Ts di questa per la Pp6 e applicando il sillogismo si ottiene la P32′.

Si può osservare che facendo entrare il fattore a nell'Hp della prop. $a = b \,.\supset.\, a \supset b$ si ha la prop. $a = b \,.\, a : \supset : b$ dalla quale si ottiene la P32′ invertendo i fattori dell'ipotesi (Pp4, PI).

§ 6. — Prodotto per una proposizione vera.

Moltiplicando una qualunque delle proposizioni a che formano una proposizione A per una proposizione vera b, si ottiene una proposizione equivalente ad A.

In simboli esprimiamo ciò scrivendo

$$\text{IV.} \qquad b \,.\, \supset . \left(\frac{ab}{a}\right) A = A$$

che si legge " Se b è vera, allora avremo che, ... „.

In virtù del metodo precedente della sostituzione la prop. IV sarà vera se riusciremo a provare che, nell'ipotesi fatta, le prop. a, ab sono equivalenti. Tale proprietà è vera e si ha

$$33. \quad b \,.\, \supset . \, a = ab \qquad [\text{Hp} : \supset : a \supset ab \,.\, ab \supset a : \supset : \text{Ts}]$$

La P33 si ottiene moltiplicando la Ts della Pp9 per la Pp4.

***

Il metodo di ragionamento espresso dalla P6 " Si può moltiplicare la Ts di una deduzione per una prop. vera „, risulta, da quanto si è detto, che è caso particolare della combinazione dei metodi III, IV.

Possiamo applicare il metodo IV alle dimostrazioni in simboli, convenendo che le indicazioni P... poste dopo il segno Hp, o alla fine di una deduzione vera, servano per indicare quale metodo si applica per dedurre dall'Hp, e per dedurre ancora dopo la deduzione, ecc...

Così, p. es., la dimostrazione della P12 può esser fatta, in simboli, sotto la forma seguente

(1) $[Hp . P10 . Pp7 : \supset : a \supset ab . a \supset c . P8 . P9 : \supset : a \supset ab . ab \supset bc . PI : \supset : Ts]$

Il primo segno, P10. Pp7 indica che si passa dalla Hp alla prop. $a \supset ab . a \supset c$ applicando la P10 e la Pp7; cosa analoga indica il secondo segno, P8. P9. Il prodotto logico (1) è equivalente al prodotto logico scritto alla destra della P12, e di più indica con precisione quali sono le prop. che devono essere applicate per fare le successive deduzioni.

§ 7. — La negazione.

Scriveremo il segno - al posto della parola *non*.

Essendo a una prop. con $-a$ indichiamo la negazione di a.

Alle *nove* proposizioni primitive già enunciate nel § 1 e che esprimono le proprietà della deduzione e del prodotto logico, uniamo le due seguenti che esprimono proprietà del segno -, e che non sono conseguenze delle prop. precedenti.

Pp10. $-(-a) = a$

Pp11. $a \supset b . \supset . -b \supset -a$.

La Pp10 esprime che la negazione della negazione di una prop. è equivalente alla prop. stessa. Ciò corrisponde alla frase comune " due negazioni affermano ".

La prop. $-a \supset -b$ si chiama la *contraria* della prop. $a \supset b$.

La prop. $-b \supset -a$ è dunque la *contraria dell'inversa*, $(b \supset a)$, della prop. $a \supset b$. La Pp11 esprime che: **si può di ogni deduzione formare la contraria dell'inversa.**

***

Per mezzo della Pp11 possiamo, p. es., dalla prop. " Ogni numero primo è primo con tutti i numeri che non sono suoi multipli ", passare alla prop. " Se un numero primo non è primo con un numero, allora questo è un multiplo del numero primo ".

In simboli le due prop. ora enunciate divengono

(1) $x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, y \varepsilon \mathrm{N} \,.\, y - \varepsilon \mathrm{N}x : \supset : \mathrm{D}(x, y) = 1$

(2) $x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, y \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \mathrm{D}(x, y) -= 1 : \supset : y \varepsilon \mathrm{N}x$

Facendo nella (1) uscire dall'Hp il fattore $x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, y \varepsilon \mathrm{N}$, abbiamo la prop.

(3) $x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, y \varepsilon \mathrm{N} : \supset : y - \varepsilon \mathrm{N}x \,.\, \supset \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1$

Osservando che per la Pp10 e per le convenzioni fatte nel Capo I la prop. $-(y - \varepsilon \mathrm{N}x)$ è equivalente alla prop. $y \varepsilon \mathrm{N}x$, abbiamo per la Pp11 che

(4) $y - \varepsilon \mathrm{N}x \,.\, \supset \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1 : \supset : \mathrm{D}(x, y) -= 1 \,.\, \supset \,.\, y \varepsilon \mathrm{N}x$

Prendendo le (3), (4) come premesse di un sillogismo si ha come conseguenza la prop.

$$x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, y \varepsilon \mathrm{N} : \supset : \mathrm{D}(x, y) -= 1 \,.\, \supset \,.\, y \varepsilon \mathrm{N}x$$

Facendo in questa entrare il fattore $x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, y \varepsilon \mathrm{N}$ nell'Hp. si ottiene la prop. (2).

***

Scriveremo $a \cup b$ al posto della negazione del prodotto logico della negazione di a per la negazione di b. Il segno $\cup$, si legge *o*, *ovvero*. La prop. $a \cup b$ chiamasi la somma logica di a con b, o l'affermazione disgiunta di a e b. Le prop. a, b si chiamano i *termini* della somma $a \cup b$. Per i segni $a \cup b \cup c$, $a \cup b \cup c \cup d$, ... valgono le osservazioni già fatte per il prodotto.

Scriveremo $a - = b$ al posto della negazione della prop. $a = b$ cioè al posto di $-(a = b)$. Il segno $- =$ si legge *non è equivalente*, o anche, *è non equivalente*.

Il complesso di segni $-a$ lo riteniamo indecomponibile; così, p. es., scrivendo $-a \supset b$ leggiamo " da non a si deduce b " e non si intende indicare la negazione della prop. $a \supset b$; per indicare ciò scriviamo $-(a \supset b)$. Analogamente $a - b$ indica il prodotto di a per $-b$, e $-a - b$ il prodotto di $-a$ per $-b$.

33. $a \cup b = -(-a - b)$ (Def)

34. $a - = b : = : -(a = b)$ (Def)

(α). $-b \supset -a . \supset . a \supset b$

$[\mathrm{Hp} . \mathrm{Pp}11 : \supset : -(-a) \supset -(-b) . \mathrm{Pp}10 . \mathrm{PIII} : \supset : \mathrm{Ts}]$

V

35. $a \supset b . = . -b \supset -a$ $[\mathrm{Pp}11 . (\alpha) : \supset : \mathrm{P}35]$

36. $a = b . = . -a = -b$

$[a = b : = : a \supset b . b \supset a . \mathrm{PIII} . \mathrm{P}35 : = : -b \supset -a . -a \supset -b : = : -b = -a : = : -a = -b]$

37. $-(ab) = -a \cup -b$

$\left[\begin{pmatrix} -a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \mathrm{P}33 . \mathrm{Pp}10 . \mathrm{PIII} : \supset : \mathrm{P}37\right]$

38. $-(a \cap b) = -a - b$ $[\mathrm{P}33 . \mathrm{Pp}10 . \mathrm{P}36 : \supset : \mathrm{P}38]$

Le P33, 34 dànno, in simboli, le definizioni dei segni $a \cup b$, $a -= b$, che erano già state indicate in parole.

La P35 esprime che

Ogni deduzione è equivalente alla contraria della sua inversa.

La P36 esprime che

Se due prop. sono equivalenti, sono equivalenti anche le loro negazioni.

La P37 esprime che

La negazione di un prodotto è equivalente alla somma delle negazioni dei fattori.

La P38 esprime che

La negazione di una somma è equivalente al prodotto delle negazioni dei termini.

Il complesso di proprietà indicate da Pp10, P35, 36, 37, 38 lo indicheremo col segno V.

***

La dimostrazione della P36 comparisce sotto la forma di una catena di equivalenze che ha per estremi i membri della equivalenza che si vuol dimostrare, e si legge " La prop. ab è equivalente ad $a \supset b \,.\, b \supset a$; questa per il principio di sostituzione (PIII) e per la P35 è equivalente a $-b \supset -a \,.\, -a \supset -b$; questa (per def.) è equivalente..... ".

***

Proponiamoci di dimostrare applicando i metodi precedenti che " Se il prodotto di due numeri reali è zero, allora è zero almeno uno dei fattori ".

(1) $$x, y \, \epsilon \, q \,.\, xy = 0 :\supset: x = 0 \,.\cup.\, y = 0$$

Dalla teoria dei numeri reali si deduce facilmente la prop.

$$x, y \, \epsilon \, q : x -= 0 \,.\, y -= 0 .\therefore \supset .\therefore xy -= 0$$

Facendo uscire dall'ipotesi il fattore $x -= 0 \,.\, y -= 0$, si ha

$$x, y \, \epsilon \, q .\therefore \supset .\therefore x -= 0 \,.\, y -= 0 :\supset: xy -= 0$$

Sostituendo alla Ts la contraria dell'inversa si ha

$$x, y \, \epsilon \, q .\therefore \supset .\therefore -(xy -= 0) :\supset: -(x -= 0 \,.\, y -= 0)$$

Ovvero per le P34, 37 e Pp 10

(2) $$x, y \, \epsilon \, q .\therefore \supset .\therefore xy = 0 :\supset: x = 0 \,.\cup.\, y = 0$$

Facendo entrare il fattore $xy = 0$ nell'Hp si ha la prop. (1), che si voleva dimostrare.

Dalla definizione dello zero si ha facilmente che

$$x, y \, \epsilon \, q .\therefore \supset .\therefore x = 0 \,.\cup.\, y = 0 :\supset: xy = 0$$

Da questa, dalla (2), dalla P12 e dalla definizione del segno $=$ si ha

(3) $$x, y \, \epsilon \, q .\therefore \supset .\therefore xy = 0 :=: x = 0 \,.\cup.\, y = 0$$

" Se x, y sono numeri reali avremo che: dire che $xy = 0$ equivale a dire che $x = 0$, o $y = 0$ ".

Facendo uso, per la Ts della (3), delle P III, 34 abbiamo

$$x, y \, \epsilon \, q .\therefore \supset .\therefore xy -= 0 :=: x -= 0 \,.\, y -= 0$$

§ 8. — Prodotto e somma membro a membro delle deduzioni.

VI

39. $a \supset b . c \supset d : \supset : ac \supset bd$

 $[\mathrm{Hp} . \mathrm{Pp}7 : \supset : ac \supset bc . c \supset d . \mathrm{P}9 : \supset : ac \supset bc . bc \supset bd . \mathrm{PI} : \supset : \mathrm{Ts}]$

39'. $a \supset b . c \supset d : \supset : a \cup c \supset b \cup d$

 $[\mathrm{P}39 .\therefore. \supset .\therefore. -b \supset -a . -d \supset -c : \supset : -b-d \supset -a-c . \mathrm{PV} .\therefore. = .\therefore. \mathrm{P}39']$

Diremo che la deduzione $ac \supset bd$ si è ottenuta *moltiplicando membro a membro* la deduzione $a \supset b$ per la deduzione $c \supset d$, e che la deduzione $a \cup c \supset b \cup d$ si è ottenuta *sommando membro a membro*, le medesime deduzioni.

Le P 39, 39' esprimono che

Si possono moltiplicare membro a membro due (o più) deduzioni.

Si possono sommare membro a membro due (o più) deduzioni.

Indicheremo i due metodi di calcolo logico ora indicati col segno VI.

***

La P 39 contiene come caso particolare la Pp7. Posto infatti c in luogo di d nella P 39, si ha $a \supset b . c \supset c : \supset : ac \supset bc$; ma la prop. $c \supset c$ è vera, (Pp1), e quindi, (PIV), $a \supset b . c \supset c = a \supset b$; facendo la sostituzione si ha $a \supset b . \supset . ac \supset bc$ che è la Pp7.

Se nella P 39 poniamo al posto di a, b, c, d le prop. $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, si ha la prop.

$$-a \supset -b \,.\, -c \supset -d : \supset : -a-c \supset -b-d$$

Trasformando questa col metodo V, si ha

$$b \supset a \,.\, d \supset c : \supset : b \cup d \supset a \cup c \tag{1}$$

che differisce dalla P 39′ solo per lo scambio delle lettere a, b, c, d con le lettere b, a, d, c. La (1) è identica alla 39′ e la chiameremo *duale* della P 39.

In generale la duale di una prop. A si ottiene sostituendo alle prop. a, b, c, ... che la formano, le prop. $-a$, $-b$, $-c$, ... e si trasforma la prop. ottenuta col metodo V sino a che sieno spariti i segni $-$ dinanzi alle a, b, c ...

Così, p. e., la P 26, § 5

$$a' = a \,.\, b' = b : \supset : a'b' = ab$$

per la sostituzione diviene

$$-a' = -a \,.\, -b' = -b : \supset : -a' -b' = -a-b$$

e trasformata diviene

$$a' = a \,.\, b' = b : \supset : a' \cup b' = a \cup b$$

che prova essere vero anche per la somma logica il principio della sostituzione di prop. equivalenti; il che c'è appena bisogno di indicare essendo la somma definita come prodotto di due prop.

La duale della prop. (II)

$$a \,.\, \supset . \, b \supset c : \supset : ab \supset c$$

è data dalla prop.

$$-(c \supset b) . \supset . a : \supset : c \supset a \cup b$$

che si legge " Se, dal non esser vero che da c si deduce b, si deduce a; allora avremo che da c si deduce a o b ".

§ 9. — **Composizione e scomposizione.**

(α). $a \supset bc . \supset . a \supset b$
[Hp . Pp1 . P IV $: \supset : a \supset bc . bc \supset b .$ Pp8 $: \supset :$ Ts]

(β). $a \supset bc . \supset . a \supset c$

(γ). $a \supset bc : \supset : a \supset b . a \supset c$ [(α) . (β) . P12 $: \supset :$ P (γ)]

VII { 40. $a \supset b . a \supset c : = : a \supset bc$ [P12 . (γ) $: \supset :$ P40]

40′. $a \supset c . b \supset c : = : a \cup b \supset c$
[P40 $.\cdot. \supset .\cdot. -c \supset -a . -c \supset -b : = :$
$-c \supset -a -b$. PV $.\cdot. = .\cdot.$ P40′]

La P40 contiene la P12 come caso particolare.
Le P40, 40′ esprimono che

Il prodotto logico di due (o più) deduzioni aventi la medesima Hp, **è equivalente alla deduzione che ha la stessa** Hp **e per** Ts **il prodotto delle tesi delle deduzioni date.**

Il prodotto logico di due (o più) deduzioni aventi la medesima Ts, **è equivalente alla deduzione che ha la stessa** Ts **e per** Hp **la somma delle ipotesi delle deduzioni date.**

Quando dalla forma $a \supset b . a \supset c$ o $a \supset c . b \supset c$ si passa alla forma $a \supset bc$, o $a \cup b \supset c$ diremo che si *compongono* le

deduzioni. Quando si fa il passaggio inverso diremo che si *scompongono* le deduzioni.

Indicheremo col segno VII il metodo di calcolo logico espresso dalle P 40, 40′.

***

Dimostrate, p. e., le prop.

(1) $$x, y \in N . x = y : \supset : x - > y$$

(2) $$x, y \in N . x = y : \supset : x - < y$$

si ha, per la P40, la prop.

(3) $$x, y \in N . x = y : \supset : x - > y . x - < y$$

Viceversa, data la (3) si possono ottenere le (1), (2). Dimostrate le prop.

(4) $$x, y \in N . x = y : \supset : x - > y$$

(5) $$x, y \in N . x < y : \supset : x - > y$$

facendo uscire il fattore $x, y \in N$ dall'Hp e applicando prima la P40, poi la P40′ si ha

$$x, y \in N .\therefore \supset .\therefore x = y . \cup . x < y : \supset : x - > y .$$

e facendo entrare un fattore nell'Hp si ha

$$x, y \in N : x = y . \cup . x < y .\therefore \supset .\therefore x - > y$$

che è equivalente al prodotto logico delle prop. (4), (5).

§ 10. — Proprietà del prodotto e della somma.

VIII

41. $ab = ba$ $\quad$ [Pp4 . $\binom{b, a}{a, b}$ Pp4 : Ɔ : P41]

41′. $a \cup b = b \cup a$
[P41 : Ɔ : - a - b = - b - a . PV : Ɔ : P41′]

42. $abc = a(bc)$ $\quad$ [Pp5 . P13 : Ɔ : P42]

42′. $a \cup b \cup c = a \cup (b \cup c)$ $\quad$ [P42 . PV : Ɔ : P42′]

(α). $(a \cup b) c$. Ɔ . $ac \cup bc$
[Pp2 . Pp9 .·. Ɔ .·. c . Ɔ . a Ɔ ac : c . Ɔ . b Ɔ bc . PVII .·. Ɔ .·. c : Ɔ : a Ɔ ac . b Ɔ bc . PVII .·. Ɔ .·. c : Ɔ : $a \cup b$. Ɔ . $ac \cup bc$. PII .·. Ɔ .·. $c(a \cup b)$. Ɔ . $ac \cup bc$. P41 .·. Ɔ .·. P(α)]

(β). $ac \cup bc$. Ɔ . $(a \cup b) c$
[Pp1 : Ɔ : $a \cup b$ Ɔ $a \cup b$. PVII : Ɔ : a Ɔ $a \cup b$. c Ɔ $a \cup b$. PVI,VII : Ɔ : ac Ɔ $(a \cup b)c$. ac Ɔ $(a \cup b)c$. PVII : Ɔ : P(β)]

43. $(a \cup b) c = ac \cup bc$ $\quad$ [(α) . (β) : Ɔ : P43]

43′. $(ab) \cup c = (a \cup c)(b \cup c)$ $\quad$ [P43 . PV : Ɔ : P43′]

Le P 41, 41′ esprimono che in un prodotto di due fattori e in una somma di due termini si può cambiare l'ordine dei fattori e dei termini.

Le P 42, 42′ esprimono che in un prodotto di tre fattori e in una somma di tre termini si può effettuare il prodotto e la somma sui due ultimi termini.

La P 43 esprime che si può moltiplicare una somma per una prop. moltiplicando per questa prop. i termini della somma, sommando poi i prodotti ottenuti. Analogo significato ha la P 43′.

In un prodotto si può cambiare a piacere l'ordine dei fattori. Si dimostra, p. es., che $abcd = dcba$, con la seguente catena di equivalenze

$$abcd = d(abc) = d(c(ab)) = d(c(ba)) = dc(ba) = (dcb)a = dcba$$

che si ottiene applicando i metodi di ragionamenti espressi dalle PIII, P41, P42. Le medesime osservazioni valgono per la somma. In generale esprimiamo le cose precedenti dicendo:

Il prodotto logico gode della proprietà commutativa.

La somma logica gode della proprietà commutativa.

In un prodotto logico si possono a piacere raggruppare i fattori.

Si ha p. es., che $abcde = b(ad)(ec)$. Infatti

$$abcde = badec = bad(ec) = b(ad)(ec).$$

Si passa da $abcde$ al prodotto $badec$ facendo uso della proprietà commutativa, poi agli altri due per mezzo della PIII e della P42. Le medesime osservazioni valgono per la somma. In generale esprimiamo ciò dicendo

Il prodotto logico gode della proprietà associativa.

La somma logica gode della proprietà associativa.

Si moltiplica una somma di due o più termini per una prop., moltiplicando per tale prop., tutti i termini della somma e addizionando i risultati. Si ha p. es.

$$(a \cup b \cup c \cup d)e = (a \cup b \cup c)e \cup de = (a \cup b)e \cup ce \cup de = ae \cup be \cup ce \cup de$$

e questa catena di equivalenza si è ottenuta applicando la PIII e la P43. Le medesime osservazioni valgono per il prodotto di due o più fattori, al quale si aggiunge una prop. Così, p. e., abbiamo

$$(abcd) \cup e = (a \cup e)(b \cup e)(c \cup e)(d \cup e)$$

In generale esprimiamo le cose precedenti dicendo

Il prodotto logico gode della proprietà distributiva rispetto alla somma logica.

La somma logica gode della proprietà distributiva rispetto al prodotto logico.

Indichiamo il complesso di proprietà ora esaminato col segno VIII.

Vedremo nel § seguente delle applicazioni del metodo VIII.

§ 11. — Legge di semplificazione.

IX

44. $a = aa$ [Pp2 . P2 : $\supset$: P44]

44′. $a = a \cup a$ [P44 . PV : $\supset$: P44′]

45. $a = b . \supset . a = ab$ [P44 . PIII : $\supset$: P45]

45′. $a = b . \supset . a = a \cup b$ [P45 . PV : $\supset$: P45′]

(α). $a \supset b . \supset . a = ab$
[Hp . P11 . PIV : $\supset$: $a \supset ab . ab \supset a$: $\supset$: Ts]

(β). $a = ab . \supset . a \supset b$
[Hp . P17 . PIV : $\supset$: $a \supset ab . ab \supset b$. PI : $\supset$: Ts]

46. $a \supset b . = . a = ab$ [(α) . (β) : $\supset$: P46]

46′. $a \supset b . = . b = a \cup b$ [P46 . PV : $\supset$. P46′]

Le P44, 44′, 45, 45′ esprimono che

Se in un prodotto vi sono due (o più) fattori identici o equivalenti, allora, sopprimendoli tutti meno uno, si ottiene un prodotto equivalente a quello dato.

Se in una somma vi sono due (o più) termini identici o equivalenti, allora, sopprimendoli tutti meno uno, si ottiene una somma equivalente a quella data.

Così, p. e., si ha la prop.

$$b = c \,.\supset .\, abaacdeac = abde$$

poichè, successivamente,

$$abaacdeac = (aaaa)\,(bc)\,de = abde$$

Le P46, 46′ esprimono che

Se per i fattori a, b di un prodotto è vera la deduzione $a \supset b$, allora, sopprimendo b nel prodotto si ottiene un prodotto equivalente a quello dato.

Se per i termini a, b di una somma è vera la deduzione $a \supset b$, allora, sopprimendo a nella somma si ottiene una somma equivalente a quella data.

Così, p. e., abbiamo

$$b \supset c \,:\supset:\, abcd = abd \,.\, a \cup b \cup c \cup d = a \cup c \cup d$$

Le proprietà ora indicate esprimono la *legge di semplificazione*, e indichiamo il loro complesso col segno IX.

***

Per applicare le regole precedenti, proponiamoci di dimostrare la formula

(1) $$(a \cup b)(b \cup c)(c \cup a) = ab \cup bc \cup ca$$

Applicando due volte la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma abbiamo (VIII)

$$(a \cup b)(b \cup c) = ab \cup ac \cup bb \cup bc$$

e col medesimo procedimento

$$(a \cup b)(b \cup c)(c \cup a) =$$
$$abc \cup acc \cup bbc \cup bcc \cup aba \cup aca \cup bba \cup bca$$

Semplificando ciascun termine della somma

$$(a \cup b)(b \cup c)(c \cup a) = abc \cup ac \cup bc \cup bc \cup ab \cup ac \cup ba \cup bca$$

Semplificando la somma, effettuando permutazioni nei fattori dei termini, e nei termini della somma

(2) $$(a \cup b)(b \cup c)(c \cup a) = abc \cup ab \cup bc \cup ca$$

Ora si ha che $abc \supset ab$, (Pp3), e quindi la (2) per la P46′ si trasforma nella (1).

*
* *

Sia stata dimostrata la prop. " Se un numero primo divide un prodotto di due fattori, allora esso divide uno almeno dei due fattori ", che in simboli si scrive

(1) $$x \in \mathrm{Np} \,.\, y, z \in \mathrm{N} \,.\, yz \in \mathrm{N}x : \supset : y \in \mathrm{N}x \,.\cup.\, z \in \mathrm{N}x$$

e proponiamoci di dedurre da questa la prop.

(2) $$x, y, z \in \mathrm{Np} \,.\, yz \in \mathrm{N}x : \supset : y = x \,.\cup.\, z = x$$

che si legge " Se un numero primo divide un prodotto di fattori primi, allora esso è eguale ad uno almeno dei fattori del prodotto ".

Moltiplicando i due membri della (1) per la proposizione $x, y, z \epsilon \mathrm{Np}$, e usando le P VIII, IX si ottiene

$$x \epsilon \mathrm{Np} . (y, z \epsilon \mathrm{N} . y, z \epsilon \mathrm{Np}) . yz \epsilon \mathrm{N}x \therefore \supset \therefore$$
$$x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . y \epsilon \mathrm{N}x : \cup : x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . z \epsilon \mathrm{N}x$$

Ora è vera la prop. $y, z \epsilon \mathrm{Np} . \supset . y, z \epsilon \mathrm{N}$, e quindi semplificando l'Hp si ha (P. 46).

(3) $$x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . y z \epsilon \mathrm{N}x \therefore$$
$$\supset \therefore x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . y \epsilon \mathrm{N}x : \cup : x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . z \epsilon \mathrm{N}x$$

Così l'Hp si è ridotta all'Hp della (3). Resta da trasformare la Ts. Moltiplicando il primo termine della Ts per $x, y \epsilon \mathrm{Np}$ e il secondo per $x, z \epsilon \mathrm{Np}$ (P. 44), e ricordando la proprietà distributiva, la Ts della (3) è equivalente alla prop.

(4) $$x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . (x, y \epsilon \mathrm{Np} . y \epsilon \mathrm{N}x : \cup : x, z \epsilon \mathrm{Np} . z \epsilon \mathrm{N}x)$$

Ora dalla teoria dei numeri primi sappiamo che

$$x, y \epsilon \mathrm{Np} . y \epsilon \mathrm{N}x : = : x, y \epsilon \mathrm{Np} . y = x$$
$$x, z \epsilon \mathrm{Np} . z \epsilon \mathrm{N}x : = : x, z \epsilon \mathrm{Np} . y = z;$$

quindi la (4) equivale a

$$x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . (x, y \epsilon \mathrm{Np} . y = x : \cup : x, z \epsilon \mathrm{Np} . z = x)$$

che per le proprietà VIII, IX si trasforma facilmente nella prop.

$$x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . (y = x . \cup . z = x)$$

La (3) diviene dunque

$$x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . yz \epsilon \mathrm{N}x : \supset : x, y, z \epsilon \mathrm{Np} . (y = x . \cup . z = x)$$

Scomponendo questa deduzione che ha per Ts il prodotto di due fattori, delle due prop. che si ottengono è

identica alla (2) quella che ha per Ts la prop. $y = x . \cup . z = x$.

§ 12. — L'assurdo.

(α). $a - a \supset b - b$

[Pp3 : $\supset$: $a(b \cup - b) \supset a$. PII : $\supset$: $a . \supset . b \cup - b \supset a$. PV : $\supset$: $a . \supset . - a \supset b - b$. PII : $\supset$: P(α)]

47. $a - a = b - b$ [(α) . $\binom{b,\ a}{a,\ b}$ (α) : $\supset$: P47]

48. $\Lambda = a - a$ (Def)

48′. $- \Lambda = a \cup - a$

49. $\Lambda \supset a$ [Pp3 : $\supset$: $a - a \supset a$. P48 : $\supset$: P49]

49′. $a \supset - \Lambda$

50. $a \Lambda = \Lambda$ [P49 . PIX : $\supset$: P50]

50′. $a \cup - \Lambda = - \Lambda$

51. $a - \Lambda = a$ [P49′ . PIX : $\supset$: P51]

51′. $a \cup \Lambda = a$

52. $a \supset \Lambda . = . a = \Lambda$

[PIV . P49 $.\!\cdot\!.$ $\supset$ $.\!\cdot\!.$ $a \supset \Lambda : = : a \supset \Lambda . \Lambda \supset a$ $.\!\cdot\!.$ $\supset$ $.\!\cdot\!.$ P52]

X

(β). $a \supset b . \supset . a - b = \Lambda$

[Hp : $\supset$: $a - b \supset b - b$. P48, 52 : $\supset$: (β)]

(γ). $a - b = \Lambda . \supset . a \supset b$

[Hp . P51′ : $\supset$: $(a - b) \cup b = b$. PVIII . P48′, 51 : $\supset$: $a \cup b = b$. PIX : $\supset$: Ts]

53. $a \supset b . = . a - b = \Lambda$ [(β) . (γ) : $\supset$: P53]

54. $a \cup b = \Lambda : = : a = \Lambda . b = \Lambda$

[P52 $.\!\cdot\!.$ $\supset$ $.\!\cdot\!.$ $a \cup b = \Lambda : = : a \cup b \supset \Lambda$. PVII : = : $a \supset \Lambda . b \supset \Lambda$. P52 : = : $a = \Lambda . b = \Lambda$]

La P 47 esprime che è *costante* il prodotto logico di una prop. per la sua negazione. Tale prodotto logico lo indichiamo (P 48) col segno Λ, che leggeremo *assurdo*. (Λ è l'iniziale, rovesciata della parola *vero*). Ciò corrisponde alla frase del linguaggio comune. " È assurda l'affermazione simultanea di una prop. e della sua negazione ".

Il segno $-\Lambda$ può anche leggersi *vero*. Le P. 49, 49′ esprimono quindi che *dall'assurdo può dedursi qualunque* prop. e che *da una prop. vera si deduce il vero.*

***

Essendo a ed h individui di una classe e α il segno che indica un'operazione, diremo che h è l'*assoluto* dell'operazione α quando, qualunque sia a, $a \alpha h$ è eguale ad h; diremo invece che h è il *modulo* dell'operazione α quando, qualunque sia a, $a \alpha h$ è eguale ad a. Così, p. es., *zero* è l'assoluto del prodotto e ∞ l'assoluto della somma per i numeri reali; *uno* è il modulo del prodotto per i numeri reali diversi da zero e 0 è il modulo della somma per i numeri reali.

***

Le P 50, 50′, 51, 51′ provano che

La prop. Λ è l'assoluto del prodotto logico.

La prop. $-\Lambda$ è il modulo del prodotto logico.

La prop. $-\Lambda$ e l'assoluto della somma logica.

La prop. Λ è il modulo della somma logica.

La P 52 esprime che " dire che da a si deduce assurdo, equivale a dire che a è equivalente ad assurdo ".

La P 53 esprime che la deduzione $a \supset b$ è equivalente alla prop. $a - b = \Lambda$.

Indicheremo il complesso di proprietà logiche espresse dalle prop. 50-54 col segno X.

***

Valendoci dei metodi precedenti dimostriamo che " Se un numero è multiplo di altri due è multiplo del minimo multiplo di questi ". In simboli (Cap. I)

$$(1) \qquad y, z \in N . x \in Ny . x \in Nz : \supset : x \in N(m(y, z)).$$

Se, restando l'Hp della (1), ammettiamo che x non sia multiplo di $m(y, z)$, allora con semplici deduzioni si trova che $rest(x, m(y, z))$ è un multiplo di $m(y, z)$; e quindi è o eguale o maggiore (cioè *non minore*) di $m(y, z)$; si ha cioè la prop.

$$(2) \qquad y, z \in N . x \in Ny . x \in Nz . x - \in N(m(y, z)) : \supset : rest(x, m(y, z)) - < m(y, z).$$

Dalla teoria della divisione avremo la prop.

$$(3) \qquad x, y, z \in N : \supset : rest(x, m(y, z)) < m(y, z)$$

(" il resto è minore del divisore ").

Moltiplicando le (2), (3) membro a membro, si ha dopo facili semplificazioni, una deduzione che ha per Hp, l'Hp della (2) e per Ts il prodotto di due prop. una delle quali è la negazione dell'altra; la deduzione ha dunque per Ts la prop. Λ e quindi l'Hp è equivalente (P 52) alla prop. Λ; si ha cioè

$$y, z \in N . x \in Ny . x \in Nz . x - \in N(m(y, z)) : = : \Lambda$$

Da questa per la P 53 e la Pp 10 si ha la (1),

***

Vogliamo dimostrare che " Il prodotto di due numeri è eguale al prodotto del massimo divisore per il minimo multiplo dei due numeri ". In simboli

(1) $$x, y \in N . \supset . xy = D(x, y) \times m(x, y).$$

Poniamo, essendo x', y' numeri interi che restano determinati dalle due eguaglianze seguenti,

$$x = D(x, y) \times x' \quad ; \quad y = D(x, y) \times y' ;$$

dalle quali si ottiene facilmente

$$\text{quot}(xy, D(x, y)) = y\, x' \quad ; \quad \text{quot}(xy, D(x, y)) = x\, y'$$

Ciò prova che quot $(xy, D(x, y))$ è un multiplo di x e y e quindi un multiplo di $m(x, y)$. Esisterà dunque un numero r tale che

$$\text{quot}(xy, D(x, y)) = m(x, y) \times r$$

o, il che equivale, tale che

(2) $$xy = D(x, y) \times m(x, y) \times r.$$

Si è così dimostrata la prop. " Se x, y sono numeri interi, allora avremo che, esiste almeno un numero intero r tale che $xy = D(x, y) \times m(x, y) \times r$ ".

Questa prop., come vedremo in seguito, si traduce così in simboli

(3) $$x, y \in N : \supset : r \in N . xy = D(x, y) \times m(x, y) \times r . -=_r . \Lambda$$

ove l'indice r posto al segno $-=$ dà a questo il significato " esiste almeno un r il quale ..... ".

Se, per semplicità, con $A_{x,y,r}$ indichiamo la prop. $r \in N . xy = D(x, y)\, m(x, y)\, r$, la (2) diviene

$$(3)' \qquad x, y \in N . \supset . A_{x,y,r} -=_r \Lambda$$

Dalla (2) si ottengono facilmente le eguaglianze $x = r\, D(x, y)\, \mathrm{quot}\,(m(x,y), y)$; $y = r\, D(x,y)\, \mathrm{quot}\,(m(x,y), x)$ che provano essere $r\, D(x, y)$ un divisore di x e y; quindi un divisore di $D(x, y)$; quindi $r\, D(x, y) \leqq D(x, y)$; quindi $r \leqq 1$.

Si è così dimostrata la prop.

$$x, y \in N . A_{x,y,r} : \supset : r = 1 . \cup . r < 1$$

Moltiplicando questa membro a membro con la prop. vera $r \in N . \supset . r \geqq 1$ si ha

$$(4) \qquad x, y \in N . A_{x,y,r} .\therefore \supset .\therefore r = 1 : \cup : r = 1 . r > 1 : \cup : r = 1 . r < 1 : \cup\, r > 1 . r < 1$$

Moltiplicando i due membri per $r \in N$; eseguendo il prodotto nella Ts; osservando che $r \in N . r = 1 . \supset . r -> 1$ e quindi che $r \in N . r = 1 . r > 1 : = : \Lambda$ e facendo osservazione analoga per gli altri due termini della Ts, la (4) diviene

$$(5) \qquad x, y \in N . A_{x,y,r} : \supset : r = 1$$

La prop. (1) è così dimostrata, poichè abbiamo provato, (3), che esiste almeno un numero r tale che

$$xy = D\,(x, y) \times m\,(x, y) \times r$$

e di più che questo numero, (5), è eguale ad *uno* e quindi che

$$xy = D\,(x, y) \times m\,(x, y)$$

§ 13. — Trasporto dei termini e dei fattori da un membro ad un altro di una deduzione.

XI

57. $ab \supset c . = . a \supset c \cup - b$

 $[ab \supset c . \mathrm{PX} : = : ab - c = \Lambda . \mathrm{PV} : = :$
 $a - (c \cup - b) = \Lambda . \mathrm{PX} : = : a \supset c \cup - b]$

57′. $a \supset b \cup c . = . a - c \supset b$

 $[\mathrm{P57} . \mathrm{PV} : \supset : \mathrm{P57'}]$

58. $ab \supset c . = . a - c \supset - b]$

 $[ab \supset c . \mathrm{P57} : = . a \supset c \cup - b . \mathrm{P57'} : = :$
 $a - c \supset - b]$

58′. $a \supset b \cup c . = . - b \supset - a \cup c$

Le P57, 57′ dimostrano che

Si può nell'ipotesi sopprimere un fattore e assegnare la negazione di tale fattore come termine alla tesi.

Si può nella tesi sopprimere un termine e assegnare la negazione di tale termine come fattore all'ipotesi.

Le P 58, 58′ sono immediate conseguenze delle due precedenti.

***

Dimostrata, p. es., la prop.

(1) $x, y \,\epsilon\, \mathrm{N} : \supset : x = y . \cup . x > y . \cup . x < y$

si ottengono, per la P57, le prop.

$$x, y \,\epsilon\, \mathrm{N} . x - = y : \supset : x > y . \cup . x < y$$
$$x, y \,\epsilon\, \mathrm{N} . x - = y . x - > y : \supset : x < y$$

Da queste due per la P 58 e la P V si ha

$$x, y \in \mathrm{N} \,.\, x \mathrel{-}> y \,.\, x \mathrel{-}< y :\supset: x = y$$
$$x, y \in \mathrm{N} \,.\, x \mathrel{-}< y :\supset: x = y \,.\cup.\, x > y$$

e queste si potevano direttamente ottenere dalla (1).

Dalla prop. già citata (§ 11)

$$y, z \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{Np} \,.\, y\,z \in \mathrm{N}x :\supset: y \in \mathrm{N}x \,.\cup.\, z \in \mathrm{N}x$$

si ottiene per la P 58 e la P V.

(2) $y, z \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{Np} \,.\, y \mathrel{-\in} \mathrm{N}x \,.\, z \mathrel{-\in} \mathrm{N}x :\supset: y\,z \mathrel{-\in} \mathrm{N}x$

Osservando ora che dalla teoria dei numeri primi si ha che

$$y \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{Np} \,.\, y \mathrel{-\in} \mathrm{N}x :=: y \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{Np} \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1$$

(" ogni numero primo è primo con tutti i numeri che non sono suci multipli "), e moltiplicando l'Hp della (2) per i fattori, che già vi sono, $y, z \in \mathrm{N}$, $x \in \mathrm{Np}$, $x \in \mathrm{Np}$, si ha

$$y, z \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{Np} \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1 \,.\, \mathrm{D}(x, z) = 1 :\supset: y\,z \mathrel{-\in} \mathrm{N}x.$$

Moltiplicando i membri di questi per $y, z \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{Np}$, si ha

$$y, z \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{Np} \,.\, \mathrm{D}(x, y) = 1 \,.\, \mathrm{D}(x, z) = 1 :\supset:$$
$$y, z \in \mathrm{N} \,.\, x \in \mathrm{Np} \,.\, \mathrm{D}(x, y\,z) = 1$$

Scomponendo (PVII) in un prodotto di tre o due deduzioni e tenendo conto di quella che ha per Ts, $\mathrm{D}(x, y, z) = 1$

si ha

$$(3) \quad y, z \in \mathrm{N} . x \in \mathrm{Np} . \mathrm{D}(x, y) = 1 . \mathrm{D}(x, z) = 1 : \supset : \mathrm{D}(x, y\,z) = 1$$

che esprime la nota proprietà " Se un numero primo è primo con i fattori di un prodotto, allora è primo col prodotto „.

***

Dimostrate per i numeri reali, p. es., positivi (Q), le prop.

$$(1) \quad x, y, z \in \mathrm{Q} . x = y . \supset . x + z = y + z$$

$$(1') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \supset . xz = yz$$

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; x > y . \supset . x + z > y + z$$

$$(2') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \supset . xz > yz$$

e dimostrate pure le prop. fondamentali relative ai segni $=, >, <$.

$$(3) \quad x, y \in \mathrm{Q} . \supset \therefore x = y : = : x - > y . x - < y$$

$$(4) \quad . \; . \; . \; \supset \therefore x > y : = : x - = y . x - < y$$

$$(5) \quad . \; . \; . \; \supset \therefore x < y : = : x - = y . x - > y$$

si possono dimostrare, facendo uso dei metodi di ragionamento che già conosciamo, le inverse delle prop. (1), (1'), (2), (2').

Abbiamo dalla prop. (2), cambiando x in y e y in x, la prop. $x, y\,z \in \mathrm{Q} . x < y . \supset . x + z < y + z$.

Sommando (P VI) membro a membro questa con la prop. (2) e facendo uso della proprietà distributiva del

prodotto rispetto alla somma (P VIII) abbiamo

(6) $$x, y, z \in Q : x > y . \cup . x < y \therefore \supset \therefore$$
$$x + z > y + z . \cup . x + z < y + z$$

Dalla (3) prendendo nella Ts la negazione dei due membri dell'eguaglianza (P V) si ha

$$x, y \in Q . \supset \therefore x - = y : = : x > y . \cup . x < y$$

Sostituendo allora nell'Hp e nella Ts della (6) le prop. equivalenti alle somme logiche che vi compariscono si ha

$$x, y, z \in Q . x - = y . \supset . x + z - = y + z$$

Portando un fattore dell'Hp nella Ts e la Ts nell'Hp (P XI — § 13, P 58), abbiamo

$$x, y, z \in Q . x + z = y + z . \supset . x = y$$

che è l'inverso della prop. (1) indipendentemente dall'Hp $x, y, z \in Q$, che è ipotesi comune (P II) a ciascuna delle due proposizioni.

In modo analogo può il lettore dimostrare per esercizio le inverse delle prop. (1'), (2), (2').

§ 14. — **Disgiunzione completa.**

Se a, b sono prop., scrivendo $a \cup b$ affermiamo " è vera una almeno delle prop. a, b ", e non escludiamo che possano essere vere entrambe.

Col complesso di segni $a - b . \cup . b - a$, affermiamo " è vera a e non è vera b, oppure è vera b e non è vera a ".

Ciò era espresso dai latini con *a aut b*, il cui corrispondente si è perduto nella lingua italiana.

Scriveremo $a \circ b$ in luogo di $a - b . \cup . b - a$, e il segno $\circ$ potremo leggerlo *aut*. In simboli

59. $a \circ b : = : a - b . \cup . b - a$ (Def)

Nella prop.

(1) $x, y \in \mathrm{N}_0 : x = 0 . \cup . y = 0 .\therefore \supset .\therefore xy = 0$

ponendo il segno $\circ$ al posto di $\cup$ si ha

(1)' $x, y \in \mathrm{N}_0 : x = 0 . \circ . y = 0 .\therefore \supset .\therefore xy = 0$

La (1)' è vera, ma esprime meno della (1), poichè xy è eguale a zero anche quando x e y sono entrambi nulli.

Nella prop.

(2) $x, y \in \mathrm{N} . x -= y : \supset : x > y . \cup . x < y$

ponendo il segno $\circ$ al posto di $\cup$ si ha

(2)' $x, y \in \mathrm{N} . x -= y : \supset : x > y . \circ . x < y$

La (2)' esprime la proprietà della (2) con maggiore esattezza poichè è noto che se $x > y$ allora $x -< y$ e se $x < y$ allora $x -> y$.

Nella prop.

$$y, z \in \mathrm{N} . x \in \mathrm{Np} . yz \in \mathrm{N}x : \supset : y \in \mathrm{N}x . \cup . z \in \mathrm{N}x$$

ponendo il segno $\circ$ al posto di $\cup$ si ottiene una prop. falsa, poichè, p. es., i numeri 6, 9 hanno un prodotto multiplo del numero primo 3 e sono entrambi multipli di tre.

In generale al segno $\circ$, nella Ts, non preceduta dal segno $-$, di una prop., si può sempre sostituire il segno $\cup$,

ma al segno $\cup$ non sempre si può sostituire il segno $\circ$; nel primo caso la sostituzione estende o restringe il senso della prop.

Il segno $\circ$ è un segno d'operazione che chiamasi *disgiunzione completa.*

***

Per il segno $\circ$ valgono le formule seguenti che il lettore può dimostrare per esercizio.

60. $a \circ b = (a \cup b)(-a \cup -b)$

61. $-(a \circ b) = (-a \circ b) = (a \circ -b)$

62. $a \circ b . \supset . a \cup b$

63. $ab = \Lambda . \supset . a \cup b = a \circ b$

64. $a \circ a = \Lambda$

65. $a \circ -a = -\Lambda$

66. $a \circ \Lambda = a$

67. $a \circ -\Lambda = -a$

68. $a \circ b = b \circ a$

69. $a \circ b \circ c = a \circ (b \circ c)$

§ 15. — **Osservazioni.**

I metodi di raziocinio espressi dalle Pp (la Pp 10 eccettuata) sono contenuti nei metodi generali I-XI esaminati nei §§ precedenti, quando si ammetta di poter affermare la Ts di una deduzione vera avente per Hp una prop. vera (il che equivale alla Pp6). Ricordando infatti la formula $a = b . \supset . a \supset b$, la Pp 1 è conseguenza della P, $a = a$ (II); la Pp2 della prop. $a = aa$ (IX); la Pp3 della

prop. $ab \supset ab$ e della P VII, poichè per mezzo di questa da $ab \supset ab$ si hanno le due prop. $ab \supset a$, $ab \supset b$; le Pp4, 5 sono conseguenze della proprietà commutative e associativa del prodotto (VIII); la Pp6 del metodo II poichè abbiamo $a \supset b . \supset . a \supset b : \supset : a \supset b . a : \supset b$, dalla quale prop. essendo vera l'Hp è vera la tesi che, a meno dell'ordine dei fattori nell'Hp coincide con la Pp6; la Pp7 si ottiene col metodo VI poichè si ha $a \supset b . c \supset c : \supset : ac \supset bc$, e riducendo l'Hp col metodo IV si ha la Pp7; la Pp8 è contenuta nel metodo I; la Pp9 si ottiene dalla P II, poichè si ha $ba \supset ab : \supset : b . \supset . a \supset ab$ che ha per Hp una prop. vera e per Ts la Pp9; la Pp11 conseguenza della prop. $a \supset b = . - b \supset - a$ (V). La Pp10 è già stata compresa nel metodo V.

***

Riuniamo per comodo del lettore i metodi di ragionamento I - XI ottenuti nei paragrafi precedenti.

I_1. Affermazione della tesi di una proposizione che ha per ipotesi una proposizione vera.

$a . a \supset b : \supset : b$ [Pp6]

I. Sillogismo e Polisillogismo.

$a \supset b . b \supset c : \supset : a \supset c$

$a \supset b . b \supset c . c \supset d : \supset : a \supset d$

. . . .

II. Far entrare un fattore nell'ipotesi o uscire un fattore dall'ipotesi.

$a . \supset . b \supset c : \supset : ab \supset c$

$ab \supset c : \supset : a . \supset . b \supset c$

III. Equivalenza.

$a = b : = : a \supset b . b \supset a$ (Def).

$a = a$

$a = b . = . b = a$

\+ $a = b . b = c : \supset : a = c$

$a' = a . \supset . \binom{a'}{a} \mathrm{A} = \mathrm{A}$

IV. Prodotto per una proposizione vera.

$b . \supset . \binom{ab}{a} \mathrm{A} = \mathrm{A}$

V. La negazione.

$-(-a) = a$ (Pp)

$a \supset b . = . -b \supset -a$

$a = b . = . -a = -b$

$a \cup b = -(-a -b)$ (Def)

$-(ab) = -a \cup -b$

$-(a \cup b) = -a -b$

VI. Prodotto e somma membro a membro delle deduzioni.

$a \supset b . c \supset d : \supset : ac \supset bd$; $a \supset b . c \supset d : \supset . a \cup c . \supset b \cup d$

VII. Composizione e scomposizione.

$a \supset b . a \supset c : = : a \supset bc$; $a \supset c . b \supset c : = : a \cup b \supset c$

VIII. Proprietà commutativa, associativa e distributiva del prodotto e della somma.

	Somma
$ab = ba$	$a \cup b = b \cup a$
$abc = a(bc)$	$a \cup b \cup c = a \cup (b \cup c)$
$(a \cup b)\, c = ac \cup bc$	$(ab) \cup c = (a \cup c)(b \cup c)$

IX. Semplificazione.

Per Somma = $\cup$
Per Prod = $\cap$

$a = aa$ (legge di semplicità)	$a = a \cup a$
$a = b \,.\supset.\, a = ab$	$a = b \,.\supset.\, a = a \cup b$ (sostituendo b a a)
$a \supset b \,.=.\, a = ab$	$a \supset b \,.=.\, b = a \cup b$

X. L'assurdo.

$\Lambda = a - a$	(Def)	$-\Lambda = a \cup -a$
$a\Lambda = \Lambda$		$a \cup -\Lambda = -\Lambda$
$a - \Lambda = a$		$a \cup \Lambda = a$

$$a \supset \Lambda \,.=.\, a = \Lambda$$

$$a \supset b \,.=.\, a - b = \Lambda$$

$$a \cup b = \Lambda :=: a = \Lambda \,.\, b = \Lambda$$

XI. Trasporto dei fattori e dei termini.

$ab \supset c \,.=.\, a \supset c \cup -b$; $a \supset b \cup c :=: a - c \supset b$

$ab \supset c \,.=.\, a - c \supset -b$; $a \supset b \cup c :=: -b \supset -a \cup c$

Capitolo III.

Le Classi.

---

§ 1. — Proposizioni condizionali e categoriche.

Ciascuna delle seguenti proposizioni

(1) $$(x+y)^2 = x^2 + 2\,xy + y^2$$

(1)′ $$x^2 + y^2 = 1$$

(1)″ $$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

esprime una condizione che deve essere verificata fra gli enti rappresentati dalle lettere x, y. Diciamo che le prop. (1), (1)′ (1)″ sono *proposizioni condizionali.*

Una prop. condizionale non è nè vera nè falsa. Così, p. es., la (1) è vera se x, y sono *numeri reali;* è falsa se x, y sono *quaternioni,* restando sottinteso che ai segni ^{2} $+$ $\times$ si dia il significato che hanno nelle corrispondenti teorie dei numeri reali e dei quaternioni; la (1)′ è vera per alcuni valori di x e y, se x e y sono numeri reali; la (1)″ è falsa qualunque siano i numeri reali x e y, è vera per speciali valori immaginari di x e y.

***

Se con a_x, b_x indichiamo prop. contenenti una lettera o un gruppo di lettere x indeterminate, se cioè a_x, b_x indi-

cano proposizioni condizionali tra gli elementi del gruppo x, e solamente tra questi, scrivendo

(2) $$a_x . \supset_x . b_x$$

intenderemo dire che " Qualunque sieno gli x che soddisfano alla condizione a_x, soddisfano anche alla condizione b_x ".

Il segno $\supset_x$ si può leggere " *si deduce qualunque sia x* ", e con la (2) esprimiamo che la deduzione si fa rispetto a tutte le lettere variabili che compariscono nell'Hp e nella Ts della proposizione enunciata.

È conveniente che nell'Hp della (2) la prop. condizionale a_x contenga come fattore logico la prop. $x \in u$, cioè u è una classe determinata e costante, affinchè sia esattamente indicata la natura degli enti x, dei quali la (2) afferma una proprietà. Così, p. e., la prop.

$$x -= y . \supset . (x + y)/2 > \sqrt{x \times y}$$

la cui ipotesi non soddisfa alla condizione indicata, non può ritenersi completa poichè è lasciata indeterminata la classe a cui appartengono gli individui x e y e non hanno quindi significato preciso i segni $-=$, $+$, $/$, $>$, $\sqrt{\ }$, $\times$. Resta tutto determinato scrivendo

$$x, y \in Q . x -= y : \supset : (x + y)/2 > \sqrt{x \times y}$$

poichè i segni indicati hanno significato preciso nella teoria dei numeri reali (Q).

Prop. della forma (2) si chiamano *categoriche*. Ogni prop. categorica ha per Hp e Ts due prop. condizionali, e la deduzione si fa rispetto a tutte le lettere variabili che compariscono nell'Hp e nella Ts.

Così, p. es., è categorica la prop.

(3) $x, y \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset_{x,y} . \, (x+y)^2 = x^2 + 2\,xy + y^2$

che ha per Hp la prop. condizionale $x, y \,\epsilon\, \mathrm{q}$ e per Ts la prop. condizionale (1).

Converremo di sopprimere l'indice al segno $\supset$ quando la deduzione si fa rispetto a *tutte* le lettere che compariscono nell'Hp e nella Ts. Così in luogo della (2) scriviamo

$$a_x \,.\, \supset .\, b_x$$

e in luogo della (3)

(3)' $x, y \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset . \, (x+y)^2 = x^2 + 2\,xy + y^2$

In luogo di $x, y, z \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, x > y \,.\, y > z : \supset_{x,y,z} : x > z$ scriviamo

$$x, y, z \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, x > y \,.\, y > z : \supset : x > z$$

***

Volendo, p. es., esprimere che il trinomio $x^2 - px + q$ è, qualunque sia il razionale x, il quadrato di un razionale, scriviamo

(4) $x \,\epsilon\, \mathrm{R} \,.\, \supset_x . \, (x^2 - px + q) \,\epsilon\, \mathrm{R}^2$

Qui l'indice x al segno $\supset$ non può essere soppresso, perchè la deduzione non si fa rispetto alle lettere p, q contenute nella Ts. La (4) è quindi una prop. categorica rispetto ad x e condizionale rispetto a p e q.

Ora sappiamo dall'algebra, che se p, q sono razionali e $p^2/4$ è eguale a q, la prop. condizionale (4) in p e q è soddisfatta. Si ha cioè che quando la prop. condizionale

in p e q

(5) $$p, q \in \mathrm{R} \,.\, p^2/4 = q$$

è vera, è vera anche la prop. condizionale (4).

Con le prop. condizionali (4), (5) possiamo quindi formare la prop. categorica

(6) $$p, q \in \mathrm{R} \,.\, p^2/4 = q : \supset : x \in \mathrm{R} \,.\, \supset_x . \, (x^2 - px + q) \in \mathrm{R}^2.$$

Questa prop. ha per Hp una prop. condizionale rispetto a p e q, e per Ts una prop. categorica rispetto ad x e condizionale rispetto a p e q. La déduzione principale è fatta rispetto a tutte le lettere variabili dell'Hp. e Ts e sono quindi stati trascurati gli indici p, q al segno $\supset$.

La prop. (3)′ contiene solo apparentemente le lettere x, y: considerata cioè come deduzione, $a \supset b$, essa è indipendente da x e y. La (4) è pure indipendente da x, ma non indipendente da p e q. La (6) è indipendente da p, q ed x. Dicendo, p. es., che la prop. (3)′ contiene solo apparentemente le lettere x, y, o è indipendente da x, y, intendiamo esprimere che essa non cambia di significato quando al posto di x, y si pongono altre due lettere indeterminate qualunque. Così, p. e., le espressioni

$$\lim_{x=0} (\operatorname{sen} x)/x \quad ; \quad (x^2 - 3\,x + 2)_{x=2}$$

sono indipendenti da x, e dipendono invece da x le espressioni

$$(\operatorname{sen} x)/x \quad ; \quad x^2 - 3\,x + 2$$

Chiameremo quindi categorica anche una prop. che non contiene, nemmeno per forma, lettere indeterminate. Così,

p. es., $3 \in \mathrm{N}$, $7 \in \mathrm{Np}$, $^2/_5 \in \mathrm{R}$, $7^2 - 3^2 = (7 + 3)(7 - 3)$ sono prop. categoriche.

Se nella prop. categorica

$$a_x . \supset_x . b_x .$$

poniamo al posto di x un ente speciale, m, non contenente cioè lettere indeterminate, scriveremo $a_m . \supset . b_m$ e non più $a_m . \supset_m . b_m$, poichè a_m, b_m, sono prop. categoriche. Converremo, cioè, di sopprimere *sempre* l'indice m al segno $\supset$ quando Hp e Ts sono prop. categoriche.

Se la prop. categorica $a_x . \supset . b_x$ è vera, cioè se la deduzione è stata fatta con le regole espresse dalle Pp o da quelle che ne sono conseguenza, allora è vera la prop. $a_m . \supset . b_m$ ottenuta dalla precedente ponendo al posto di x un ente speciale m.

Se nella prop.

(7) $$x \in \mathrm{N} . x < 17 : \supset : (x^2 - x + 17) \in \mathrm{Np}$$

poniamo al posto di x successivamente i numeri 3, 30, 18, e nelle Hp delle prop. che si ottengono sopprimiamo i fattori $3 \in \mathrm{N}$, $30 \in \mathrm{N}$, $18 \in \mathrm{N}$, che sono prop. vere (P IV), abbiamo

(8) $$3 < 17 . \supset . 23 \in \mathrm{Np}$$

(9) $$30 < 17 . \supset . 887 \in \mathrm{Np}$$

(10) $$18 < 17 . \supset . 323 \in \mathrm{Np}.$$

Le prop. (8), (9), (10) sono vere come è vera la prop. (7) dalla quale sono state ottenute con sostituzione, seb-

bene nella (9) l'Hp sia falsa e la Ts vera, e nella (10) sia falsa l'Hp e la Ts ($323 = 17 \times 19$). La (9) ci esprime che da un Hp assurda si può giungere ad una conseguenza vera, e la (10) che da un ipotesi falsa si può giungere ad una conseguenza falsa. Se però la prop. (7) è vera, allora qualunque numero si sostituisca ad x non sarà possibile ottenere una prop. che abbia vera l'Hp e falsa la Ts.

§ 2. — Segni $\supset$ ed $=$.

Scriviamo il segno K al posto della parola *classe* (gruppo, collezione, ...).

Scriviamo il segno ϵ (iniziale della parola ἐστί) al posto della frase *è un*. Se a è una classe, scrivendo $x \epsilon a$ esprimiamo che x *è un individuo della classe* a e leggiamo "x è un a".

Ammettiamo che, essendo a una classe, il segno $x \epsilon$, ove x è una lettera indeterminata, posto dinanzi ad a dia origine ad una proposizione contenente la lettera indeterminata x.

In ciò che segue per indicare che la prop. p contiene la lettera o il gruppo di lettere x, o, in altri termini, per esprimere che la prop. p è *condizionale rispetto ad* x, porremo alla lettera p l'indice x, (p_x). Analogamente $p_{x,\,y}$, $p_{x,\,y,\,z}$, ... indicano proposizioni condizionali rispetto a x e y, e rispetto a x, y e z .....

Abbiamo già indicato che si può far uso indifferentemente dei segni $p_x \,.\, \supset_x . \, q_x$, $p_x \,.\, \supset . \, q_x$, quando x è il solo gruppo variabile contenuto in p e q, cioè quando p e q sono condizionali rispetto al solo gruppo x. Scriveremo

$p_x . =_x . q_x$ in luogo dell'affermazione simultanea $p_x . \supset_x . q_x : q_x . \supset_x . p_x$. Il segno $=_x$ si legge “ *equivale, qualunque sia* x, *ad* ”.

***

$a, b, c, d \, \epsilon \, \mathrm{K} . \supset \therefore$

1. $a \supset b := : x \, \epsilon \, a . \supset_x . x \, \epsilon \, b$ (Def)
2. $a = b := : a \supset b . b \supset a$ (Def)
3. $a = b := : x \, \epsilon \, a . =_x . x \, \epsilon \, b$ [P2 . Ɔ . P3]
4. $a = a$
5. $a = b . = . b = a$
6. $a = b . b = c : \supset : a = c$

[PIII . P1, 2 : Ɔ : P4, 5, 6]

7. $a = b . c = d : \supset : a \supset c . = . b \supset d.$
8. $a \supset b . b \supset c : \supset : a \supset c$ [PI . P1 : Ɔ : P7]
9. $x \, \epsilon \, a . a \supset b : \supset : x \, \epsilon \, b$

[P1 $\therefore \supset \therefore a \supset b : \supset : x \, \epsilon \, a . \supset . x \, \epsilon \, b$. PII $\therefore = \therefore$ $a \supset b . x \, \epsilon \, a : \supset : x \, \epsilon \, b$. PVIII, III $\therefore = \therefore$ P9]

Scriviamo $a, b, c, \ldots\ldots \epsilon \, \mathrm{K}$ in luógo dell'affermazione simultanea $a \, \epsilon \, \mathrm{K} . b \, \epsilon \, \mathrm{K} . c \, \epsilon \, \mathrm{K} \ldots$ e leggiamo $a, b, c, \ldots$ *sono classi.*

L'ipotesi $a, b, c, d \, \epsilon \, \mathrm{K}$ che precede le P1-9 si sottintende debba esser distribuita a ciascuna delle P1-9, (PII) o, il che equivale, (P VII) che dall'ipotesi $a, b, c, d \, \epsilon \, \mathrm{K}$ si deduce il prodotto logico delle P1-9.

Il complesso di segni $a \supset b$ si legge “ la classe a è contenuta in b ”. Intendiamo esprimere con questo segno che “ ogni a è un b ”. La P1 infatti si legge “ Dire che a è contenuta in b, equivale a dire che se x è un a, allora, qualunque sia x, x è un b ”.

Il segno $=$ posto tra due classi si legge “ *è eguale a* ”,

e col segno $a = b$ esprimiamo (P2) che " ogni a è un b e ogni b è un a ".

Il segno $\supset$ posto tra due prop. si legge *si deduce* e posto tra due classi *è contenuto*. Il segno $=$ posto tra due prop. si legge *è equivalente a*, e posto tra due classi *è eguale a*.

L'uso dei medesimi segni, in corrispondenza con due termini diversi del linguaggio comune, resta in parte giustificato dal fatto che, se a, b sono classi, i segni $\supset$ ed $=$, nelle prop. $a \supset b$, $a = b$, prendono il significato che hanno per le prop. quando dinanzi ad a e b si pone $x \epsilon$. Nel § seguente vedremo che ha luogo il passaggio inverso.

Le P4-7 dànno le proprietà fondamentali dell'eguaglianza e si ottengono dalle corrispondenti proprietà per l'equivalenza delle proposizioni. Nelle P6, 7 il segno $: \supset :$ si legge *si deduce*, poichè come risulta dalle P1, 2 i complessi di segni $a \supset b$, $a = b$, ove a, b sono classi, indicano delle proposizioni.

La P8 è una nuova forma di sillogismo tra classi. Si legge " Se ogni a è un b e ogni b è un c, allora ogni a è un c ". Il 1°, 2°, 4° segno $\supset$ si legge *è contenuto*, il 3°, *si deduce*.

La P9 è un altra forma di sillogismo che vale solo per le classi. Si legge " Se x è un a e ogni a è un b, allora x è un b ".

* * *

I segni ϵ e $\supset$ si leggono spesso nel linguaggio comune nel medesimo modo. Dicendo, p. es., " l'uomo è un bipede " intendiamo dire " ogni uomo è un bipede ", e traducendo in simboli scriviamo *Uomo* $\supset$ *Bipede* e non *Uomo* ϵ *Bipede*, poichè con quest'ultima forma trascu-

riamo la parola *ogni* o l'articolo *lo*, che dà alla frase il suo esatto significato. Se alla parola *Oro* diamo il significato chimico di corpo semplice, allora scriviamo *Oro* ϵ *Corpo semplice* e non *Oro* $\supset$ *Corpo semplice*.

In generale, scriviamo $a \epsilon b$ quando a è un individuo (o è considerato come tale), di una classe (la classe b); scriviamo $a \supset b$ quando a (e b) è una classe. Così, p. es., scriviamo $2 \epsilon \mathrm{N}$ e non $2 \supset \mathrm{N}$; se a è una retta e b un piano che passa per a, scriviamo $a \supset b$, se a e b sono considerati come classi di punti; scriviamo invece $a \epsilon b$ se il piano è considerato come classe di rette.

La differenza essenziale tra i segni ϵ e $\supset$ sta in questo; che, mentre dalle affermazioni simultanee $a \supset b \,.\, b \supset c$, $a \epsilon b \,.\, b \supset c$, si può dedurre (P8, 9) che $a \supset c$ o $a \epsilon c$, dall'affermazione simultanea $a \epsilon b \,.\, b \epsilon c$ nulla si deduce, essendo b considerato prima come classe, poi come individuo di una classe. Così, p. es., nulla si deduce dall'affermazione simultanea delle prop. $5 \epsilon \mathrm{Np}$, $\mathrm{Np} \epsilon$ [Classe contenente infiniti individui].

§ 3. — Segni $\overline{x\epsilon}$, $\overline{(x, y)\epsilon}$, ...

$a \epsilon \mathrm{K} \,.\, p_x, q_x \epsilon \mathrm{P} \,.\supset .:.$

1. $a = \overline{x\epsilon}\,(p_x) :=: x \epsilon a \,.=_x.\, p_x$ (Def)
2. $\overline{x\epsilon}\,(x \epsilon a) = a$ [P1 . $\supset$. P2]
3. $x\epsilon\,(\overline{x\epsilon}\,(p_x)) \,.=_x.\, p_x$
4. $p_x \,.\supset.\, q_x :=: \overline{x\epsilon}\,(p_x) \supset \overline{x\epsilon}\,(q_x)$

Essendo p_x una proposizione condizionale rispetto ad x, col segno $\overline{x\epsilon}\,(p_x)$ indichiamo *la classe degli individui x*

i quali soddisfano alla condizione p_x. La P1 si legge " Dire che a è eguale alla classe degli x i quali soddisfano alla condizione p_x, equivale a dire che, la prop. $x \epsilon a$ è equivalente, qualunque sia x, alla prop. p_x ".

Così, p. e., con $\overline{x\epsilon}(x \epsilon N . x > 7)$ indichiamo la classe dei numeri interi che sono maggiori di 7.

Con la P1 si stabilisce che il segno $\overline{x\epsilon}$ posto dinanzi ad una prop. condizionale in x produca una classe indipendente da x; come si è già stabilito che il segno $x\epsilon$ posto dinanzi ad una classe (indipendente da x) produca una prop. condizionale rispetto ad x.

Le P2, 3 esprimono che i segni $x\epsilon$, $\overline{x\epsilon}$ applicati successivamente si distruggono. Così, p. e., $\overline{x\epsilon}(x \epsilon N)$ indica N, e $x\epsilon(\overline{x\epsilon}(x \epsilon N . x > 7))$ indica la prop. $x \epsilon N . x > 7$.

La P4 si legge " Dire che da p_x si deduce, qualunque sia x, q_x, equivale a dire che ogni x che soddisfa alla condizione p_x è uno degli x che soddisfa alla condizione q_x ". Ciò, insieme all'osservazione fatta nel § precedente, giustifica l'uso del segno Ɔ nei due significati, *si deduce* ed *è contenuto*, potendosi dall'un significato passare all'altro con l'aggiunta del segno $\overline{x\epsilon}$ o $x\epsilon$.

***

$a \epsilon K_2 . p_{x,y}, q_{x,y} \epsilon P . Ɔ \therefore$

5. $a = \overline{(x, y)\epsilon}(p_{x,y}) : = : (x, y) \epsilon a . =_{x,y} . p_{x,y}$ (Def)
6. $(x, y) \epsilon (\overline{(x, y) \epsilon a}) = a$
7. $(x, y) \epsilon (\overline{(x, y) \epsilon}(p_{x,y})) . =_{x,y} . p_{x,y}$
8. $p_{x,y} . Ɔ . q_{x,y} : = : \overline{(x, y)\epsilon}(p_{x,y})\, Ɔ\, \overline{(x, y)\epsilon}(q_{x,y})$

. . . .

Scriveremo K_2, K_3, K_4, ... al posto delle frasi *classe di coppie, classe di terne, classe di gruppi di quattro elementi*, ...

Essendo x, y due enti qualunque, con (x, y) indichiamo la loro *coppia*. Indichiamo coppie diverse con le notazioni (x, y), (y, x).

Le coppie di numeri interi x, y tali che il loro prodotto è eguale a 18 sono

$$(1, 18) \; ; \; (2, 9) \; ; \; (3, 6) \; ; \; (6, 3) \; ; \; (9, 2) \; ; \; (18, 1)$$

Indichiamo la classe che ha per individui queste coppie (classe di coppie di numeri interi) con la notazione

$$\overline{(x, y)} \, \epsilon \, (x, y \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \, xy = 18) \tag{1}$$

Analogamente con

$$\overline{(x, y, z)} \, \epsilon \, (x, y, z \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \, xyz = 4) \tag{2}$$

indichiamo la classe che ha per individui le terne

$(1, 1, 4)$; $(1, 2, 2)$; $(1, 4, 1)$; $(2, 1, 2)$; $(2, 2, 1)$; $(4, 1, 1)$.

Valendosi dei concetti della geometria Cartesiana, facendo cioè ad ogni coppia di numeri reali corrispondere un punto di un piano, e ad ogni terna di numeri reali un punto dello spazio, col segno (1) indichiamo un gruppo di sei punti del piano e col segno (2) un gruppo di sei punti dello spazio.

Con $\overline{(x, y)} \, \epsilon \, (x, y \, \epsilon \, \mathrm{q} \, . \, x^2 + y^2 = 1)$ indichiamo la circonferenza che ha il centro nell'origine e il raggio eguale all'unità di misura; con $\overline{(x, y, z)} \, \epsilon \, (x, y, z \, \epsilon \, \mathrm{q} \, . \, x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ la sfera che ha il centro nell'origine delle coordinate e il raggio eguale all'unità di misura; con $\overline{(x, y, z)} \, \epsilon \, (x^2 + y^2 = 1)$ una superficie cilindrica di rotazione avente per asse l'asse delle z; .....

Con la P4 definiamo il significato del segno $\overline{(x, y)\,\epsilon}$ e tale prop. è analoga alla P1. Le P6-8 corrispondono alle P2-4. Analoghe definizioni simboliche potrebbero darsi per i segni $\overline{(x, y, z)\,\epsilon}$, ...

***

Abbiamo già introdotti i segni N, N_0, R, q, per indicare " numero intero positivo ", " numero intero positivo o nullo ".....

Introdotto il segno N gli altri possono esser definiti per mezzo di questo.

Essendo fx una funzione algebrica di x e u una classe di numeri, con fu indicheremo il complesso dei valori che prende fx quando al posto di x si pongono tutti gli individui di u. Così, p. es., $2x$ indica un numero pari, 2N o N2 indica la classe dei numeri pari; $2x-1$ indica un numero dispari, N2—1 indica la classe dei numeri dispari. Analogamente con N^2 indichiamo la classe dei quadrati, con a^N la classe delle potenze di a, con —N la classe dei numeri interi negativi.

La classe N_0 resta definita ponendo

$$(1) \qquad N_0 = \overline{x\epsilon}\,(x \epsilon N \,.\, \cup \,.\, x = 0)$$

Indicando con n la classe dei numeri interi positivi o negativi o nulli, si ha

$$(2) \qquad n = \overline{x\epsilon}\,(x \epsilon N \,.\, \cup \,.\, x \epsilon -N \,.\, \cup \,.\, x = 0)$$

Essendo $f(x, y)$ una funzione algebrica di x e y e u, v classi di numeri, con $f(u, v)$ indichiamo il complesso di valori che prende f, quando al posto di x e y si pongano tutti gli individui di u e v.

Ogni razionale è il rapporto di due numeri interi x e y (x/y); quindi con N/N indichiamo la classe dei razionali

$$(3) \qquad \mathrm{R} = \mathrm{N}/\mathrm{N}$$

e analogamente, essendo $0/x = 0$,

$$(4) \qquad \mathrm{R}_0 = \mathrm{N}_0/\mathrm{N}$$

Risulta dalle convenzioni precedenti che $-\mathrm{R}$ indica la classe dei razionali negativi. Indicando con r la classe dei razionali o positivi o negativi o nulli, abbiamo

$$(5) \qquad \mathrm{r} = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{R} \,.\cup.\, x \,\epsilon -\mathrm{R} \,.\cup.\, x = 0)$$

La classe dei numeri reali positivi, che indicheremo con Q, può esser definita, come vedremo, come classe dei limiti superiori di classi di razionali. Scriveremo in seguito in simboli la definizione di Q. Con $-\mathrm{Q}$ resta indicata la classe dei numeri reali negativi, ed avremo

$$(6) \qquad \mathrm{q} = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{Q} \,.\cup.\, x \,\epsilon -\mathrm{Q} \,.\cup.\, x = 0)$$

$$(6)' \qquad \mathrm{Q}_0 = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{Q} \,.\cup.\, x = 0).$$

*
* *

Definiamo altre classi che ci saranno utili negli esempi dei paragrafi seguenti

$$(7) \quad n \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{Z}_n = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, x \leqq n)$$

$$(8) \quad m, n \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, m < n :\supset: \mathrm{Z}\,(m, n) = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, m \leqq x \,.\, x \leqq n)$$

$$(9) \quad a, b \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, a < b :\supset: a \,^{-}\, b = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, a < x \,.\, x < b)$$

$$(10) \quad \ldots\ldots :\supset: a \vdash b = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, a \leqq x \,.\, x < b)$$

$$(11) \quad \ldots\ldots :\supset: a \dashv b = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, a < x \,.\, x \leqq b)$$

$$(12) \quad \ldots\ldots :\supset: a \vdash\!\dashv b = \overline{x\epsilon}\,(x \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, a \leqq x \,.\, x \leqq b)$$

Con Z_n indichiamo il complesso di numeri interi $1, 2, \ldots n$.

Con $Z(m, n)$ i numeri $m,\ m+1,\ m+2, \ldots n$.

Con $a - b$ tutti i numeri reali compresi fra a e b gli estremi esclusi, con $a \vdash b$, $a \dashv b$, $a \vdash\!\dashv b$, il medesimo intervallo compreso a ed escluso b, compreso b ed escluso a, compreso a e b.

Dalle (7), (8) risulta che $Z(1, n)$ indica la medesima cosa di Z_n.

§ 4. — Segni $\cap$ ed $\cup$.

$a, b, c, d \in K \,.\, p_x, q_x \in P : \supset .\!\cdot\!.$

1. $a \cap b = \overline{x\epsilon}\,(x \in a \,.\, x \in b)$
1'. $a \cup b \,.\!=\!.\, \overline{x\epsilon}\,(x \in a \,.\cup.\, x \in b)$ } (Def)
2. $ab = a \cap b$
3. $x \in (ab) :=_x: x \in a \,.\, x \in b$
3'. $x \in (a \cup b) :=_x: x \in a \,.\cup.\, x \in b$
4. $\overline{x\epsilon}\,(p_x \,.\, q_x) :=: \overline{x\epsilon}\,(p_x) \cap \overline{x\epsilon}\,(q_x)$
4'. $\overline{x\epsilon}\,(p_x \cup q_x) :=: \overline{x\epsilon}\,(p_x) \cup \overline{x\epsilon}\,(q_x)$
5. $a = b \,.\, c = d : \supset : ac = bd$
5'. $a = b \,.\, c = d : \supset : a \cup c = b \cup d$
6. $ab = ba$
6'. $a \cup b = b \cup a$
7. $abc = a(bc)$
7'. $a \cup b \cup c = a \cup (b \cup c)$
8. $(a \cup b)\,c = ac \cup bc$
8'. $(ab) \cup c = (a \cup c)\,(b \cup c)$

9. $a = aa$

9'. $a = a \cup a$

10. $a = b . \supset . a = ab$

10'. $a = b . \supset . a = a \cup b$

11. $a \supset b . = . a = a \cap b$

11'. $a \supset b . = . b = a \cup b$

12. $a \supset b . c \supset d : \supset : ac \supset bd$ = conf 5,

12'. $a \supset b . c \supset d : \supset : a \cup c \supset b \cup d$ " 5'

13. $a \supset bc : = : a \supset b . a \supset c$

13'. $a \cup b \supset c : = : a \supset c . b \supset c$

Con $a \cap b$ indichiamo la massima classe contenuta in a e in b (P1); con $a \cup b$ la minima classe che contiene a e b (2). Il segno $\cap$ si legge *e*, e il segno $\cup$ si legge *o*. Chiameremo $a \cap b$ il *prodotto logico* di a per b, e $a \cup b$ la *somma logica* di a con b.

Scriveremo (P2), ab in luogo di $a \cap b$ quando ciò, per altre convenzioni, non possa dar luogo ad equivoci. Così p. e., se x, y x', y' sono numeri reali, per indicare i numeri comuni ai due intervalli $x - y$, $x' - y'$ scriveremo $(x - y) \cap (x' - y')$ e non $(x - y)(x' - y')$ potendo questo indicare (§ 3) la classe i cui individui sono prodotti di un numero di $x - y$ con un numero di $x' - y'$.

Le P3, 3', 4, 4' che esprimono la proprietà distributiva del segno $x \epsilon$ rispetto al prodotto delle classi, e del segno $\overline{x \epsilon}$ rispetto al prodotto delle proposizioni, giustificano il doppio uso dei segni $\cap$ ed $\cup$ per le prop. e per le classi.

Le P5, 5' esprimono il principio della sostituzione (P III).

Le P6-8, 6'-8' esprimono che la somma e il prodotto delle classi godono della proprietà commutativa, associativa e distributiva, come per le prop. (P VIII).

Le P9-10, 9'-10' dànno per le classi la legge di semplificazione (PIX).

Le P12, 12', 13, 13' corrispondono alle PVIII, IX.

***

Facendo uso della proprietà distributiva del segno $\overline{x\epsilon}$ rispetto al prodotto e alla somma delle prop., le definizioni date nel § precedente per le classi N_0, n, ... prendono le forme più semplici seguenti

$$N_0 = N \cup \overline{x\epsilon}\,(x = 0)$$
$$n = N \cup - N \cup \overline{x\epsilon}\,(x = 0)$$
$$n = N_0 \cup - N$$
$$r = R \cup - R \cup \overline{x\epsilon}\,(x = 0)$$
$$q = Q \cup - Q \cup \overline{x\epsilon}\,(x = 0)$$
$$n \,\epsilon\, N \,.\, \supset .\, Z_n = N \cap \overline{x\epsilon}\,(x \overline{\overline{<}}\, n)$$
$$m, n \,\epsilon\, N \,.\, m < n :\supset: Z(m, n) = N \cap \overline{x\epsilon}\,(m \overline{\overline{<}}\, x \,.\, x \overline{\overline{<}}\, n)$$

ecc. ecc. ...

Analogamente abbiamo, p. e.,

$$n \,\epsilon\, q \,.\supset .\, q \cap \overline{x\epsilon}\,(x > n) = n + Q$$
$$n \,\epsilon\, q \,.\supset .\, q \cap \overline{x\epsilon}\,(x < n) = n - Q$$

***

Per mezzo dei segni che indicano classi già note e i segni $\cap$ ed $\cup$, possiamo formare altre classi. P. es. $N2 \cap N3$ indica la classe dei numeri che sono multipli di 2 e di 3, e si ha che,

$$N2 \cap N3 = N6;$$

$\mathrm{Np} \frown (3 + \mathrm{N})$ indica la classe dei numeri primi che sono maggiori di 3 e si ha

$$\mathrm{Np} \frown (3 + \mathrm{N}) \supset (\mathrm{N}6 + 1) \smile (\mathrm{N}6 - 1)$$

che esprime " Ogni numero primo maggiore di 3 è un multiplo di 6 aumentato o diminuito di 1 ".

Analogamente

$$\mathrm{Np} \frown (4\mathrm{N} + 1) \supset \mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2$$

" I numeri primi della forma $4x + 1$ sono somme di due quadrati ".

$\mathrm{N}4 \smile \mathrm{N}6$ indica la classe dei numeri che sono multipli di 4 o di 6 e si ha

$$\mathrm{N}4 \smile \mathrm{N}6 \supset \mathrm{N}2$$

§ 5. — **Segno -.**

$a, b, c \,\epsilon\, \mathrm{K} \,.\, p_x \,\epsilon\, \mathrm{P} : \supset .\!\cdot.$

1. $x - \epsilon\, a \,.=_x.\, -(x \,\epsilon\, a)$ (Def)
2. $-a = \overline{x\epsilon}\,(x - \epsilon\, a)$ (Def)
3. $x \,\epsilon\, (-a) \,.=_x.\, x - \epsilon\, a$ [P1, 2 . $\supset$. P3]

3_1. $-(\overline{x\epsilon}\,(p_x)) = \overline{x\epsilon}\,(-p_x)$

4. $-(-a) = a$
5. $a \supset b \,.=.\, -b \supset -a$
6. $a = b \,.=.\, -a = -b$
7. $-(ab) = -a \smile -b$

7'. $-(a \smile b) = -a - b$

8. $ab \supset c :=: a \supset c \smile -b$

8'. $a \supset b \smile c \,.=.\, a - c \supset b$

9. $ab \supset c := : a - c \supset - b$

9'. $a \supset b \cup c . = . - c \supset b \cup - a$

10. $a - a = b - b$

10'. $a \cup - a = b \cup - b$

11. $x \epsilon (a - a) . =_x . \Lambda$

11'. $x \epsilon (a \cup - a) . =_x . - \Lambda$

Scriviamo (P1) il segno $x - \epsilon a$, che si legge " x non è un a ", in luogo della negazione della prop. $x \epsilon a$. Così p. es., scriviamo $1/2 - \epsilon N$ in luogo di $-(1/2 \epsilon N)$.

Essendo a una classe con $- a$ (P2), indichiamo la classe costituita da tutti gli individui x i quali non appartengono ad a. Così, p. es., con $- N$ indichiamo, *senza alcuna restrizione*, **tutte** le cose che non sono numeri interi. Per non dar luogo a discussioni metafisiche sulla classe *totale* o su altre questioni di importanza minima, sarà utile unire la classe $- a$ ad un'altra classe b per mezzo del segno $\cap$. Così p. es., con $R \cap - N$ indichiamo, la classe dei razionali che non sono numeri interi; con $(1 + N) \cap - [(1 + N) \times (1 + N)]$ i numeri interi maggiori di 1 che non sono prodotti di due numeri maggiore di uno. Si può porre

$$Np = (1 + N) \cap - [(1 + N) \times (1 + N)]$$

La P3 esprime che " dire che x è un $- a$ equivale a dire che x non è un a ".

Le P5-7, 7' corrispondono alle PV. La P5 esprime che " Dire che ogni a è un b, equivale a dire che ogni $- b$ è un $- a$ ". Le P7, 7' esprimono che la negazione di un prodotto (o di una somma) è la somma (o il prodotto) delle negazioni dei fattori (o dei termini).

Le P10, 10', 11, 11' corrispondono alle PXI.

*
* *

Per mezzo del segno - la definizione di Z_n e $Z(m, n)$ può esser data sotto questa forma

$$n \epsilon N . \supset . Z_n = N \frown - (n + N)$$

$$m, n \epsilon N . m < n . \supset Z(m, n) = N \frown - (m - N) \frown - (n + N)$$

cioè " Z_n è la classe dei numeri non maggiori di n ", " $Z(m, n)$ è la classe dei numeri non minori di m e non maggiori di N ".

Analogamente per gli intervalli

$$a, b \epsilon q . a < b : \supset : a \frown b = q \frown - (a - Q_0) \frown - (b + Q_0)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \supset : a \vdash b = q \frown - (a - Q) \frown - (b + Q_0)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \supset : a \dashv b = q \frown - (a - Q_0) \frown - (b + Q)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \supset : a \vdash\!\dashv b = q \frown - (a - Q) \frown - (b + Q)$$

*
* *

Le P10, 10′ esprimono che è costante, il prodotto di una classe a per la classe $-a$, e la somma di a con $-a$. La P11 esprime che la prop. $x \epsilon (a - a)$ equivale qualunque sia x ad assurdo. Abbiamo convenuto di porre il segno $=_x$ tra due prop. condizionali rispetto ad x; con la P11 non facciamo niente in contrario a questa regola poichè la prop. Λ essendo il prodotto di una prop. *qualunque* per la sua negazione, può esser ritenuta come prop. condizionale rispetto a qualsiasi lettera.

§ 6. — Il nulla e il tutto.

$a, b, c \,\epsilon\, K \,.\supset\therefore$

1. $\Lambda = \overline{x\epsilon}\,(\Lambda)$ (Def)

1'. $-\Lambda = \overline{x\epsilon}\,(-\Lambda)$

2. $a - a = \Lambda$ 2'. $a \cup -a = -\Lambda$

3. $a = \Lambda : = : x \,\epsilon\, a \,. =_x \Lambda$

[§ 2, P3 $\therefore \supset \therefore a = a - a : = : x \,\epsilon\, a \,. =_x . \, x\epsilon\,(a - a)$.
P1, 2 $\therefore \supset \therefore$ P3]

4. $a -= \Lambda : = : x \,\epsilon\, a \,. -=_x \Lambda$

5. $a\Lambda = \Lambda$ 5'. $a \cup -\Lambda = -\Lambda$

6. $a - \Lambda = a$ 6'. $a \cup \Lambda = a$

7. $a \supset \Lambda \,. = . \, a = \Lambda$ 7'. $-\Lambda \supset a \,. = . \, a = -\Lambda$

8. $a \supset b \,. = . \, a - b = \Lambda$ 8'. $a \supset b \,. = . \, b \cup -a = -\Lambda$

9. $a \cup b = \Lambda : = : a = \Lambda \,.\, b = \Lambda$

10. $a \cup b -= \Lambda : = : a -= \Lambda \,.\cup.\, b -= \Lambda$

11. $a = \Lambda \,.\cup.\, b = \Lambda : \supset : ab = \Lambda$

12. $ab -= \Lambda : \supset : a -= \Lambda \,.\, b -= \Lambda$

13. $ab = \Lambda \,.\supset.\, (a \cup b) - b = a$

[Hp . P8 $: \supset : a \supset -b$. § 4, P11 $: \supset : a = a - b$. P2, 6'
$: \supset : a = (a - b) \cup (b - b) : \supset :$ Ts]

La prop. Λ (assurdo) è condizionale rispetto a qualunque lettera, quindi $\overline{x\epsilon}\,(\Lambda)$ rappresenta una classe, che conveniamo (P 1) di indicare ancora col segno Λ che leggeremo *nulla*. Il segno $-\Lambda$ può leggersi *tutto*. Le prop. 2, 2' esprimono che il prodotto della classe a per la

classe $-a$ è il *nulla*, e la somma di a con $-a$ il *tutto*, o la classe totale.

Il segno $a = \Lambda$ può leggersi " la classe a è nulla „ e il segno $a -= \Lambda$ " la classe a non è nulla „. Le P3, 4 esprimono che " Se una classe a è nulla, allora è assurdo ammettere che x sia un a „. " Se la classe a non è nulla non è assurdo ammettere che x sia un a „. In altri termini " Dicendo, a è nulla, esprimiamo che non esistono individui che appartengano ad a, o che a non contiene individui „, " Dicendo, a non è nulla, esprimiamo che esistono individui che appartengono ad a, o che a contiene individui „. Così p. es., abbiamo

$$\mathrm{Np} \frown (\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2) \frown (\mathrm{N}4 - 1) = \Lambda$$
$$\mathrm{N}^2 \frown (\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2) -= \Lambda$$

cioè " Non esistono numeri primi somme di due quadrati e della forma $4x - 1$ „, " Esistono numeri quadrati che sono somme di due quadrati „.

Le P5, 5′, 6, 6′ esprimono che " Il nulla è l'assoluto del prodotto e il modulo della somma; il tutto è l'assoluto della somma e il modulo del prodotto „.

Le P7-9, 7′ 8′ corrispondono alle PX. Le P10-12 sono vere anche quando a, b, c sono prop.; la P10 si ottiene dalla P9 prendendo le negazioni dei suoi due membri; la P11 è immediata conseguenza dalla P5; la P12 è la contraria dell'inversa della P11.

Facilmente si ottengono le duali delle P10-12 che però non hanno importanza pratica.

La P13 esprime " Se la classe ab non contiene individui, allora il prodotto di $a \cup b$ per $-b$ è eguale ad a „. Questa prop. ha molta importanza in matematica. Posto p. es.

$$\mathrm{q} = \mathrm{Q} \cup - \mathrm{Q} \cup x \,\epsilon\, (x = 0)$$

abbiamo per la P13

$$Q \cup -Q = q \cap \overline{x\,\epsilon}\,(x -= 0)$$
$$Q \cup \overline{x\,\epsilon}\,(x = 0) = q \cap -(-Q)$$
$$-Q \cup \overline{x\,\epsilon}\,(x = 0) = q \cap -Q$$
$$Q = q \cap -(-Q) \cap \overline{x\,\epsilon}\,(x -= 0)$$
$$-Q = q \cap -Q \cap \overline{x\,\epsilon}\,(x -= 0)$$
$$\overline{x\,\epsilon}\,(x = 0) = q \cap -Q \cap -(-Q)$$

poichè il prodotto di due qualunque delle classi Q, $-Q$, $\overline{x\,\epsilon}\,(x = 0)$ è eguale a nulla.

***

Per mezzo del segno Λ, esprimiamo con

$a-b = \Lambda$, la frase: Ogni a è un b
$ab = \Lambda$, „ Nessun a è un b (e anche, nessun b è un a)
$ab -= \Lambda$, „ Qualche a è un b („ qualche b è un a)
$a-b -= \Lambda$, „ Qualche a è un-b („ „ $-b$ è un a).

Ordinariamente i logici rappresentano queste frasi, ordinatamente, con le vocali **a**, **e**, **i**, **o**, e rappresentano le varie forme di sillogismo con parole, come B**a**rb**a**r**a**, F**e**r**io**, D**a**r**a**pt**i**....., prendendo le vocali che compariscono in tali parole, ordinatamente, come premessa maggiore, premessa minore e conseguenza del sillogismo.

La forma in Barbara è dunque $a-b = \Lambda . b-c = \Lambda : \supset : a-c = \Lambda$ che per la P8 diviene, $a \supset b . b \supset c : \supset : a \supset c$, che è la forma già da noi considerata per il sillogismo. La forma in Ferio è $ab -= \Lambda . bc = \Lambda : \supset : a-c -= \Lambda$, che per la P58 del § 13 del Cap. II e la P8 diviene, $a \supset c . c \supset -b : \supset : a \supset -b$ e questa coincide con l'ordinaria forma

di sillogismo. La forma in Darapti è, $a \supset b \,.\, b \supset c : \supset : ac - = \Lambda$, che è falsa e deve esser posta sotto la forma, $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\, a - = \Lambda : \supset : ac - = \Lambda$, che col sillogismo ha più niente a che fare.

Chiamando *sillogismo* la forma di ragionamento espressa dalla formula $a \supset b \,.\, b \supset c : \supset : a \supset c$ è chiaro che la forma *Ferio* dipende dal sillogismo e da altre forme di ragionamento (P XI).

La forma Darapti è poi falsa. Essa, insieme ad altre, è chiamata dai logici forma *indebolita*.

Dalle P3, 4 abbiamo modo di esprimere in simboli le frasi " Esiste almeno un x il quale ..... „, " Non esiste un x il quale ..... „, delle quali si fa molto uso in matematica.

Se x, y sono numeri reali positivi, e $x < y$, sappiamo che esistono dei multipli interi di x che superano y. Possiamo esprimere ciò dicendo che la classe dei numeri interi n tali che $nx > y$, contiene individui; porre cioè

$$\mathrm{N} \cap \overline{n \epsilon} \, (nx > y) - = \Lambda$$

e si ha la prop.

$$(1) \qquad x, y \,\epsilon\, \mathrm{Q} \,.\, x < y : \supset : \mathrm{N} \cap \overline{n \epsilon} \, (nx > y) - = \Lambda$$

Non volendo far uso della classe si ha (P 4)

$$(2) \qquad x, y \,\epsilon\, \mathrm{Q} \,.\, x < y \therefore \supset \therefore n \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, nx > y : - =_n : \Lambda$$

che si può leggere " Se x, y sono numeri reali e $x < y$, allora avremo che; dire che n è un numero intero e $nx > y$, non è qualunque sia n assurdo „, ed esprimiamo

che, stando le ipotesi fatte, " esiste almeno un numero intero n tale che $nx > y$ ".

Analogamente si ha:

$$(3) \quad x, y \in \mathrm{N} . \mathrm{D}(x, y) = 1 : \supset : \mathrm{N} \cap \overline{n \epsilon}(x^n - 1 \in \mathrm{N}y) - = \Lambda$$

oppure

$$(4) \quad x, y \in \mathrm{N} . \mathrm{D}(x, y) = 1 \therefore \supset \therefore n \in \mathrm{N} . x^n - 1 \in \mathrm{N}y : - =_n : \Lambda$$

" Se x e y sono numeri primi fra loro, allora esiste almeno un numero n tale che $x^n - 1$ sia multiplo di y ".

Si osservi che le Ts delle prop. (1)-(4) sono *indipendenti* dalla lettera n nel senso già stato indicato nel § 1 di questo Capitolo. In generale sono indipendenti da x le espressioni $\overline{x \epsilon}\,(a_x)$, $a_x =_x \Lambda$, $a_x - =_x \Lambda$.

Secondo le convenzioni fatte, x/N, ove x è un numero, indica una classe di numeri tali, che dividendo x per uno qualunque di essi, si ottiene un numero intero. Quindi $\mathrm{N} \cap x/\mathrm{N}$ indica la classe *dei divisori interi di* x. Abbiamo

$$x \in \mathrm{Np} : \supset : [\mathrm{N} \cap x/\mathrm{N} \cap \overline{y \epsilon}(y - = 1 . y - = x)] = \Lambda$$

oppure

$$x \in \mathrm{Np} \therefore \supset \therefore y \in (\mathrm{N} \cap x/\mathrm{N}) . y - = 1 . y - = x : =_y : \Lambda$$

" Se x è un numero primo allora, *non esistono* divisori di x che sieno diversi da 1 e da x ".

Si intende che le frasi *esiste* ..... *non esiste* ..... significano *la classe* ..... *contiene* ..... *non contiene individui*, e, con tali frasi, non si allude affatto all'*esistenza* nel senso filosofico.

§ 7. — Disgiunzione completa.

$a, b, c \in K . p_x, q_x \in P : \supset \therefore$

1. $a \circ b = \overline{x\epsilon} (x \epsilon a . \circ . x \epsilon b)$ (Def)
2. $x \epsilon (a \circ b) : =_x : x \epsilon a . \circ . x \epsilon b$
3. $\overline{x\epsilon} (p_x \circ q_x) : =_x : \overline{x \epsilon} (p_x) . \circ . \overline{x \epsilon} (q_x)$
4. $a \circ b = (a - b) \cup (b - a)$
5. $-(a \circ b) = (-a \circ b) = (a \circ -b)$
6. $ab = \Lambda . \supset . a \cup b = a \circ b$
7. $a \circ a = \Lambda$
8. $a \circ -a = -\Lambda$
9. $a \circ \Lambda = a$
10. $a \circ -\Lambda = -a$
11. $a \circ b = b \circ a$
12. $a \circ b \circ c = a \circ (b \circ c)$

Con $a \circ b$ indichiamo (P1) gli individui x i quali sono tali che x è un a e x non è un b, o x non è un a e x è un b. Il segno $\circ$ si legge ancora *aut*. Dalla P4 risulta che $a \circ b$ è la classe degli a che non sono b o dei b che non sono a.

Le P2, 3 esprimono la proprietà distributiva dei segni $x\epsilon$, $\overline{x\epsilon}$ rispetto alla *disgiunzione completa*. Le altre prop. corrispondono alle prop. del § 14, Cap. II.

§ 8. — Gli indici ai segni $\supset$ ed $=$.

Sia a_x una prop. condizionale in x, cioè una prop. esprimente una condizione alla quale devono soddisfare gli

enti (o l'ente), rappresentati dalla lettera indeterminata x. Contenga a_x, come fattore logico, la prop. $x \epsilon u$, ove u è una classe determinata e costante, cioè indipendente da qualsiasi ente variabile. La classe $\overline{x \epsilon}(a_x)$ è contenuta nella classe u, e può o no contenere individui; cioè può essere vera una, ed una sola, delle due prop.

$$(1) \qquad \overline{x \epsilon}(a_x) - = \Lambda$$

$$(2) \qquad \overline{x \epsilon}(a_x) = \Lambda$$

Se è vera la (1), allora esistono degli u che soddisfano alla condizione a_x, e la prop. categorica a_m, ove m è un individuo speciale, è vera quando $m \epsilon (\overline{x \epsilon}(a_x))$, è falsa quando $m - \epsilon (\overline{x \epsilon}(a_x))$. Se è vera la (2), allora non esistono degli u che soddisfano alla condizione a_x, e la prop. a_m è falsa qualunque sia m.

Se a_x è il prodotto logico di $x \epsilon u$ per a'_x, ove a'_x è una prop. condizionale in x non contenente più il fattore $x \epsilon u$, allora alla (1) può darsi la forma

$$(1)' \qquad -(x \epsilon u . \supset_x . - a'_x)$$

e alla (2) la forma

$$(2)' \qquad x \epsilon u . \supset_x . - a'_x$$

Se essendo vera la (1), la classe $\overline{x \epsilon}(a_x)$ prende il suo massimo valore u, cioè se $\overline{x \epsilon}(a_x) = u$, allora abbiamo che

$$(3) \qquad x \epsilon u . \supset_x . a'_x$$

P. e. la prop. condizionale $x \epsilon \mathrm{N} . x \overline{\gtrless} 7$, soddisfa alla condizione (1), che posta sotto la forma (1)' esprime “ non è vero che qualunque sia il numero intero x, x non è o eguale o maggiore (cioè è minore) di 7 ”.

La prop. condizionale $x, y \in q . x^2+y^2+1=0$, soddisfa alla condizione (2) che posta sotto la forma (2)' esprime " qualunque sieno i numeri reali x, y, allora x^2+y^2+1 non è eguale a zero ".

Per la prop. condizionale $x \in N . x \gtreqless 1$ è soddisfatta la condizione (3), poichè si ha sempre $x \in N . \supset_x . x \gtreqless 1$.

***

Se nella prop. $a_x \supset_x b_x$ non è indicato in qualche modo a qual classe costante u appartengono gli x, allora la prop. $a_x \supset_x b_x$ può esser ritenuta come condizionale, poichè può esser vera per certi valori di x, falsa per certi altri. Così p. e. la prop.

(1) $$x+z=y+z . \supset_{x, y, z} . x=y$$

è vera quando x, y, z sono numeri reali, è falsa quando x, y, z sono individui di una classe di grandezze per le quali la differenza di due individui della classe non è un unico individuo della classe.

In luogo della (1), scriveremo

(2) $$x+z=y+z . \supset . x=y ,$$

lasciando quindi al segno $\supset$ gli indici (espliciti o sottintesi) solo quando la prop. è categorica. Per la forma (2) si ha, p. e.,

(3) $$x, y, z \in q : \supset_{x, y, z} : x+z=y+z . \supset . x=y$$

che corrisponde, come vedremo, all'ordinaria forma

$$x, y, z \in q . x+z=y+z : \supset_{x, y, z} : x=y.$$

Se nella Ts della (3) si ponesse la (1), si avrebbe una

prop. con l'Hp condizionale e la Ts della forma assegnata alle prop. categoriche, quindi una prop. di forma attualmente priva di significato.

***

Ammettiamo che la prop. $a_x \supset_x b_x$ sia categorica, e quindi, o vera o falsa, quando in essa è in qualche modo indicato a qual classe appartengono gli enti x.

Nelle forme ordinarie indichiamo a qual classe appartengono gli x ponendo nell'Hp a_x della prop. $a_x \supset_x b_x$, il fattore $x \in u$. Ciò facciamo, p. e., scrivendo

(1) $$x, y \in Q . x < y : \supset : z \in N . zx > y . - =_z \Lambda$$

A questa per la PXI del Cap. II si può dare la forma

(2) $$x < y : \supset .\therefore z \in N . zx > y . - =_z \Lambda : \cup : - (x, y \in Q)$$

Le (1), (2) sono equivalenti, ma nella (2) l'ipotesi relativa alla natura degli x, y è espressa sotto una forma troppo diversa dall'ordinaria.

Noi faremo uso, in generale, della forma (1).

***

Di tutte le precedenti convenzioni ci varremo per stabilire le leggi alle quali soddisfano gli indici al segno $\supset$ e quindi al segno $=$.

Le Pp1-11, ammesse nel Cap. II sono vere quando a, b, c sono prop. categoriche e quindi della forma generale $p_x \supset_x q_x$. Tra queste le prop.

[1] $a \supset a$ (Pp1)

[2] $a \supset aa$ (Pp2)

[3]	$ab \supset a$	(Pp3)
[4]	$ab \supset ba$	(Pp4)
[5]	$abc \supset a(bc)$	(Pp5)
[6]	$-(-a) = a$	(Pp10)

sono vere quando a, b, c sono classi e il segno $\supset$ si legge *è contenuto*. Ora sappiamo (§ 3) che dalla prop. categorica $a_x \supset_x b_x$ si passa alla relazione tra classi $\overline{x \epsilon}(a_x) \supset \overline{x \epsilon}(b_x)$; e viceversa (§ 2) dalla relazione tra classi $u \supset v$ si passa alla prop. categorica $x \epsilon a \,.\supset_x.\, x \epsilon v$. Le prop. [1]-[6] sono dunque vere quando al posto di a, b, c si pongono delle prop. condizionali qualunque, dando al segno $\supset$ gli indici convenienti. Così p. e. per la [4] si ha $a_x b_x \,.\supset_x.\, b_x a_x$ e lo stesso per le altre.

*
* *

Le proposizioni

[7]	$a \supset b \,.\supset.\, ac \supset bc$	(Pp7)
[8]	$a \supset b \,.\, b \supset c :\supset: a \supset c$	(Pp8)
[9]	$a \supset b \,.\supset.\, -b \supset -a$	(Pp11)

sono vere quando a, b, c sono classi e il segno $\supset$, preceduto e seguìto dal gruppo massimo di punti, si legge *si deduce* e gli altri segni $\supset$ si leggono *è contenuto*.

Ponendo al posto di a, b, c delle prop. condizionali, possono darsi vari casi, dei quali esamineremo i principali.

Alla prop. [7] possiamo dare la forma:

$$[7]_1 \qquad a_{x,y} \supset_x b_{x,y} \,.\supset_y.\, a_{x,y}\, c_{x,y,z} \supset_{x,z} b_{x,y}\, c_{x,y,z}.$$

In questa ponendo al posto di y una costante m, e

sopprimendo, in conseguenza, l'indice y, e ponendo poi y al posto di z, abbiamo

[7]' $$a_x \supset_x b_x . \supset . a_x c_{x,y} \supset_{x,y} b_x c_{x,y}$$

che corrisponde esattamente alla [7] nella quale a, b, c sieno classi.

Per la [8] (*sillogismo*), abbiamo le due forme

[8]₁ $$a_{x,y} \supset_x b_{x,y} . b_{x,y} \supset_x c_{x,y} : \supset_y : a_{x,y} \supset_x c_{x,y}$$

[8]₂ $$a_{x,y} \supset_x b_{x,y} . b_{x,y} \supset_{x,y} c_{x,y} : \supset_y : a_{x,y} \supset_x c_{x,y}$$

Ponendo nella [8]₁, o [8]₂ una costante m al posto di y, si ha

[8]' $$a_x \supset_x b_x . b_x \supset_x c_x : \supset : a_x \supset_x c_x$$

che corrisponde alla [8] nella quale a, b, c sono classi.

Analogamente abbiamo per la [9],

[9]₁ $$a_{x,y} \supset_x b_{x,y} . \supset_y . - b_{x,y} \supset_x - a_{x,y}$$

dalla quale per y costante si ha

[9]' $$a_x \supset_x b_x . \supset . - b_x \supset_x - a_x .$$

***

Le proposizioni

[10] $a . a \supset b : \supset : b$ (Pp6)

[11] $b . \supset . a \supset ab$ (Pp9)

sono prive di significato, comunque si legga il segno $\supset$, quando a, b sono classi.

Consideriamo i casi seguenti quando a, b sono prop. condizionali.

Per la prop. [10], abbiamo

[10]$_1$ $$a_x \,.\, a_x \supset_x b_x : \supset_x : b_x.$$

Ricordando ora che la prop. condizionale a_x si può sempre porre sotto la forma $x \epsilon u$, ove u è una classe, poichè $a_x = x \epsilon (\overline{x \epsilon} (a_x))$, la [10]$_1$ prende la forma

$$x \epsilon u : x \epsilon u \,.\, \supset_x .\, x \epsilon v \,.\!\cdot\, \supset_x \,\therefore\, x \epsilon v\,,$$

o anche

[10]$_1'$ $$x \epsilon u \,.\, u \supset v : \supset : x \epsilon v$$

che è la forma di sillogismo già dimostrata nel § 2 (Cap. III, P9).

Per la prop. [11] abbiamo

[11]$_1$ $$b_y \,.\, \supset_y .\, a_{x,\,y} \supset_x a_{x,\,y}\, b_y$$

che per y o x costante prende le due forme

[11]$_1'$ $$b_x \,.\, \supset_x .\, a_x \supset a_x\, b_x$$

[11]$_1''$ $$b \,.\, \supset .\, a_x \supset_x a_x\, b.$$

***

Ecco alcune conseguenze delle precedenti proposizioni.

Consideriamo p. e., la P6 del § 3, Cap. II. Ponendo al posto delle a, b, c delle prop. condizionali, può il lettore ripetere facilmente le dimostrazioni delle prop. (α)-(ε), e quindi della P6 che diviene:

(1) $$a_{x,\,y} \supset_x b_{x,\,y} \,.\, c_y : \supset_y : a_{x,\,y} \supset_x b_{x,\,y}\, c_y$$

che per y costante da

(2) $$a_x \supset_x b_x \,.\, c : \supset : a_x \supset_x b_x\, c$$

e quest'ultima esprime che " Si può moltiplicare la Ts di una prop. per una prop. *categorica* vera ".

*
* *

Ripetendo la dimostrazione data al § 4, Cap. II per le prop. II, II_1, abbiamo la prop.

(1) $$a_x \,.\, \supset_x .\, b_{x,y} \supset_y c_{x,y} : = : a_x \, b_{x,y} \supset_{x,y} c_{x,y}$$

che dà l'importante regola di fare entrare o uscire un fattore dall'Hp, quando il segno $\supset$ ha degli indici.

Ponendo nella (1) al posto di y una costante, abbiamo

(2) $$a_x \,.\, \supset_x .\, b_x \supset c_x : = a_x \, b_x \supset_x c_x$$

e di questa prop. abbiamo sempre fatto uso negli esempi contenuti in questo libro, poichè quando, p. e., dalla prop.

$$x, y, \epsilon \mathrm{N} \,.\, x = y : \supset : x \,-\!> y \,.\, x \,-\!< y$$

facciamo uscire il fattore $x = y$ dall'Hp, dobbiamo scrivere

$$x, y \,\epsilon\, \mathrm{N} \therefore \supset_{x,y} \therefore x = y : \supset : x \,-\!> y \,.\, x \,-\!< y.$$

Ponendo nella (1) al posto di y una costante e cambiando poi y in x abbiamo

(3) $$a \,.\, \supset .\, b_x \supset_x c_x : = : ab_x \supset_x c_x.$$

Di questa forma abbiamo fatto uso, p. e., per dimostrare la P9, § 2, Cap. III. Si osservi che tale prop. è identica alla $[10]_1'$ di questo §, e la $[10]_1'$ è evidentemente conseguenza della (1), della quale ci siamo serviti per dimostrare la P9 del § 2.

***

Ammesso in generale che la prop. categorica $a_x \supset_x b_x$ debba contenere l'ipotesi relativa alla natura degli x, e che tale ipotesi, $(x \in u)$, debba esser contenuta nella Hp della prop. $a_x \supset_x b_x$, possiamo ammettere che la Ts di una prop. categorica non possa contenere più lettere indeterminate della Hp.

L'Hp può però contenere più lettere della Ts come p. e. nella prop.

$$(\alpha) \qquad x, y, z \in \mathrm{q} \,.\, x > y \,.\, y > z : \supset_{x, y, z} : x > z.$$

Si possono cioè avere prop. categoriche della forma $a_{x, y} \supset_{x, y} b_x$.

Queste possono esser ridotte alla forma normale $p_x \supset_x q_x$, mediante la formula

$$(1) \qquad a_{x, y} \supset_{x, y} b_x : = : a_{x, y} - =_y \Lambda \,.\, \supset_x \,.\, b_x$$

che si dimostra con la catena di equivalenze

$$[a_{x, y} \supset_{x, y} b_x : = : a_{x, y} - b_x =_{x, y} \Lambda : = : - b_x\, a_{x, y} \supset_{x, y} \Lambda : = :$$
$$- b_x \,.\, \supset_x \,.\, a_{x, y} \supset_y \Lambda : = : - b_x \,.\, \supset_x \,.\, a_{x, y} =_y \Lambda : = :$$
$$a_{x, y} - =_y \Lambda \,.\, \supset_x \,.\, b_x]$$

Così la (α), prende la forma

$$x, z \in \mathrm{q} : y \in \mathrm{q} \,.\, x > y \,.\, y > z \,.\, - =_y \Lambda : \supset_{x, z} : x > z$$

che si legge " Se x, z sono numeri reali, ed esiste un numero reale y tale che $x > y$ e $y > z$, allora avremo che $x > z$ ".

Abbiamo, p. e., dimostrato nel § 12, Cap. II (pag. 52), che

$$(\beta) \quad x, y \in \mathrm{N} : \supset : r \in \mathrm{N} \,.\, xy = \mathrm{D}(x, y) \times \mathrm{m}(x, y) \times r \,.\, - =_r \Lambda$$

$$(\gamma) \quad x, y, r \in \mathrm{N} \,.\, xy = \mathrm{D}(x, y) \times \mathrm{m}(x, y) \times r : \supset : r = 1.$$

Dalla (γ) si deduce facilmente la prop.

$$(\gamma)' \qquad x, y, r \in \mathrm{N} \,.\, xy = \mathrm{D}(x, y) \times \mathrm{m}(x, y) \times r : \text{Ɔ} : \\ xy = \mathrm{D}(x, y) \times \mathrm{m}(x, y)$$

Facendo per questa uso della (1) si ha

$$(\gamma)'' \; x, y \in \mathrm{N} : r \in \mathrm{N} \,.\, x, y = \mathrm{D}(x, y) \times \mathrm{m}(x, y) \times r \; - =_r \therefore \text{Ɔ} \therefore \\ xy = \mathrm{D}(x, y) \times \mathrm{m}(x, y)$$

Moltiplicando i due membri della (β) per $x, y \in \mathrm{N}$ e prendendo la prop. così ottenuta e la $(\gamma)''$ come premesse di un sillogismo si ha come conseguenza,

$$(\delta) \qquad x, y \in \mathrm{N} \,.\, \text{Ɔ} \,,\, xy = \mathrm{D}(x, y) \times \mathrm{m}(x, y)$$

Così la prop. (δ) è stata dimostrata facendo uso completamente delle regole del simbolismo logico, cosa che non abbiamo fatta nel § 12, non avendo voluto far uso di regole sugli indici, che non potevano essere perfettamente intese in quel punto.

***

In seguito alla P54 del § 12, Cap. II possono porsi le prop.

(δ). $a \,.\, \text{Ɔ} \,.\, -a = \Lambda$

[$\mathrm{P}48, 52 : \text{Ɔ} : a - a \,\text{Ɔ}\, \Lambda \,.\, \mathrm{P}11 : \text{Ɔ} : a \,.\, \text{Ɔ} \,.\, -a \,\text{Ɔ}\, \Lambda \,.$
$\mathrm{P}52 : \text{Ɔ} : (\delta)$]

(ϵ). $-a = \Lambda \,.\, \text{Ɔ} \,.\, a$

[$\mathrm{P}5 \therefore \text{Ɔ} \therefore -\Lambda \,\text{Ɔ}\, a \,.\, -\Lambda : \text{Ɔ} : a \,.\, \mathrm{P}51, \mathrm{V} \therefore \text{Ɔ} \therefore$
$-a \,\text{Ɔ}\, \Lambda \,.\, \text{Ɔ} \,.\, a \,.\, \mathrm{P}52 \therefore \text{Ɔ} \therefore (\epsilon)$]

55. $a \,.\!=\!.\, -a = \Lambda$ [$(\delta) \,.\, (\epsilon) \,.\, \text{Ɔ} \,.\, \mathrm{P}55$]

56. $a . = . a - = \Lambda$

$$\left[\binom{-a}{a} P55 : \supset : -a . = . a = \Lambda . PV : \supset : P56\right]$$

56_1. $a - = \Lambda . = . -a = \Lambda$

$[P55, 56, III . \supset . P56_1]$

Queste prop. non le abbiamo poste prima di parlare esplicitamente degli indici per non dar luogo ad equivoci.

Ponendo al posto di a una prop. condizionale a_x, le P55, 56, 56_1 divengono

1. $a_x . =_x . - a_x = \Lambda$
2. $a_x . =_x . a_x - = \Lambda$
3. $a_x - = \Lambda . =_x . - a_x = \Lambda$

La P1, p. e., esprime che la prop. condizionale a_x equivale qualunque sia x alla prop. condizionale $- a_x = \Lambda$. Sarebbe errore porre al segno $=$ di $- a_x = \Lambda$ l'indice x, poichè allora si direbbe che " affermare a_x equivale ad affermare che non esistono x i quali soddisfino alla condizione $- a_x$ ", il che è falso.

Si osservi che il gruppo delle P1, 2, 3 rappresenta l'ordinario modo di *riduzione all'assurdo*, e la precedente osservazione indica chiaramente di quali precauzioni si debba far uso per adoperarlo. Del resto il metodo di riduzione all'assurdo può in ogni questione esser sostituito dai metodi di dimostrazione del Cap. II.

Capitolo IV.

Applicazioni.

---

§ 1. — Individui di una classe.

$u \,\epsilon\, \mathrm{K} \,.\, a, b, c, d \,\epsilon\, u \,:\supset\therefore$

1. $a = a$ (Def)
2. $a = c \,.\, b = c :\supset: a = b$ (Def)
3. $x = a \,.\supset.\, x \,\epsilon\, u$ (Def)

(α). $a = b \,.\supset.\, b = a$

$[\mathrm{P2} \therefore\supset\therefore b = b \,.\, a = b :\supset: b = a \,.\, \mathrm{P1} \,.\, \mathrm{PII} \therefore\supset\therefore (\alpha)]$

4. $a = b \,.=.\, b = a$ $\left[(\alpha) \,.\, \binom{b,\, a}{a,\, b}\, \alpha :\supset: \mathrm{P4}\right]$

5. $a = b \,.\, b = c :\supset: a = c$ $[\mathrm{P2} \,.\, \mathrm{P4} :\supset: \mathrm{P5}]$

6. $a = b \,.\, c = d :\supset: a = c \,.=.\, b = d$

7. $\iota a = \overline{x \,\epsilon}\, (x = a)$ (Def)

8. $x \,\epsilon\, \iota a = x \,\epsilon\, (\iota a)$ (Def)

9. $x \,\epsilon\, \iota a \,.=.\, x = a$

10. $x \,{-}\epsilon\, \iota a \,.=.\, x \,\epsilon\, {-}\iota a \,.=.\, x \,{-}{=}\, a$

Se a, b sono individui di una classe u, esprimiamo che a è eguale a b scrivendo, $a = b$. Se la classe u che con-

sideriamo non può esser definita ricorrendo ad altre classi note, allora definiamo la relazione espressa dal segno = mediante le proprietà espresse dalle P1-3. La P1 esprime che " ogni cosa è eguale a se stessa ", la P2 che " Se due cose sono eguali ad una stessa cosa, allora la prima è eguale alla seconda ", la P3 che " Se una cosa x può esser detta eguale ad un individuo a di u, allora x è un u ".

Quando definiamo p. e. la classe N non ricorrendo ad altre classi note (Vedi § 6), ammettiamo che per l'eguaglianza sieno soddisfatte le proprietà espresse dalle P1-3. Definendo ogni razionale come funzione m/n di una coppia (m, n) di numeri interi, allora possiamo chiamare eguali i razionali m/n, m'/n', quando $mn' = nm'$. Per l'eguaglianza così definita sono vere le P1-3 (§ 7).

Le proprietà del segno = espresse dalle P1, 4, 5 prendono, rispettivamente, i nomi, *riflessiva*, *simmetrica*, *transitiva*. La P5 esprime che il principio della *sostituzione* è vero per l'eguaglianza definita dalle P1-3.

***

Il segno ι, iniziale della parola ἴσος, può leggersi *isos*. Se a è un individuo di u, con ιa indichiamo (P7) la classe degli x che sono eguali ad a. Quindi (P8, 9) $x \epsilon \iota a$ indica la medesima cosa del segno $x = a$. Il segno = resta così decomposto nei due segni ϵ, ι.

Se u, v sono classi e la classe $u \cap v$ contiene il solo individuo a, scriviamo $uv = \iota a$ e non $uv = a$, poichè sotto questa forma si avrebbe, $x \epsilon (uv) = x \epsilon a$, e $x \epsilon a$ non ha ricevuto significato, non essendo a una classe. Così, p. e., scriveremo

$$Z_3 = \iota 1 \cup \iota 2 \cup \iota 3$$

e non $Z_3 = 1 \cup 2 \cup 3$. Per le classi r, q, (pag. 78), possiamo scrivere più semplicemente

$$\mathrm{r} = \mathrm{R} \cup - \mathrm{R} \cup \iota 0$$
$$\mathrm{q} = \mathrm{Q} \cup - \mathrm{Q} \cup \iota 0$$

cioè, p. es. " q è la classe degli individui che sono, o numeri reali positivi, o numeri reali negativi, o *sono eguali* a zero ".

Abbiamo p. es.

$$\mathrm{Np} = (1 + \mathrm{N}) \cap \overline{x \,\epsilon}\, \{ \overline{(y, z)\, \epsilon}\, (y, z \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, yz = x) = \iota\,(1, x) \cup \iota\,(x, 1) \}$$

" Np è eguale alla classe dei numeri x tali, che le coppie di numeri y, z il cui prodotto è x sono eguali ad $(1, x)$ o eguali ad $(x, 1)$ ".

§ 2. — Numero degli individui di una classe.

Sia n un numero intero maggiore di 1, e S_n indichi la somma degli individui della classe Z_n (cioè la somma dei primi n numeri). Volendo dimostrare che

(1) $$S_n = n(n + 1)/2$$

possiamo procedere nel modo seguente:

(α). Per $n = 2$ si ha dalla (1), $S_2 = 3$, cioè $S_2 = 1 + 2$. *Dunque la* (1) *è vera quando* $n = 2$.

(β). Supposto che la (1) sia vera per il numero n maggiore di 1, abbiamo che $S_{n+1} = n(n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$. *Dunque, la* (1) *ammessa vera per un numero n maggiore di* 1 *è vera per il numero* $n + 1$.

Da (α) si ha che la (1) è vera per $n=2$; da questa e da (β) si ha che è vera per $n=3$; da questa e da (β) che è vera per $n=4$ e così di seguito.

Volendo *dimostrare* che la (1) è vera, p. es., per $n=25843$ occorre fare 25841 deduzioni analoghe alla precedente, e la (1) sarà così provata vera per tutti i numeri compresi fra 2 e 25843, gli estremi compresi; ma non potremo affermare ancora che essa è vera per i numeri maggiori di 25843, cioè non potremo affermare che la (1) è vera *qualunque* sia il numero intero n maggiore di 1.

Si *ammette* che la (1) sia *dimostrata* vera dai ragionamenti (α) e (β), e diciamo che, per la dimostrazione, si è fatto uso del *principio d'induzione completa*, che possiamo enunciare in generale così:

Se una proprietà è vera per un numero intero a, e questa proprietà ammessa vera per un numero b eguale o maggiore di a, si può dimostrare che è vera anche per $b+1$, allora avremo che la proprietà considerata è vera per tutti i numeri interi eguali o maggiori di a.

***

Per tradurre in simboli la prop. precedente, osserviamo che ogni *proprietà dei numeri* è espressa da *una classe di numeri*.

Per l'esempio precedente la classe da considerare è

$$(2) \qquad (1+\mathrm{N}) \cap \overline{x\,\epsilon}\,(\mathrm{S}_x = x(x+1)/2)$$

" Numeri interi x maggiori di 1 i quali sono tali che la somma dei primi x numeri interi, (S_x), è eguale ad

$x(x+1)/2$ „. La prop. (1) resta dimostrata quando si provi che la classe (2) è eguale ad $1+N$.

Infatti ponendo nella (1) l'Hp, essa diviene

$$x \epsilon (1+N) . \supset . S_x = x(x+1)/2$$

alla quale può darsi la forma (pag. 71, P4)

$$(1+N) \supset \overline{x \epsilon} (S_x = x(x+1)/2)$$

questa per la legge di semplificazione diviene

$$1+N = (1+N) \frown \overline{x \epsilon} (S_x = x(x+1)/2)$$

Indicheremo con K'N, K'R, K'q, ..., o anche semplicemente con KN, KR, Kq, ..., le frasi " *classe di* numeri interi positivi „, " *classe di* razionali positivi „, " *classe di* numeri reali „ .....

Il principio d'induzione, in un caso particolare, è espresso in simboli dalla prop.

(3) $$u \epsilon K'N . 1 \epsilon u . u+1 \supset u : \supset : N \supset u$$

" Se u è una classe di numeri, 1 è un individuo di u, e ogni individuo di u aumentato di 1 appartiene ad u, allora avremo che ogni numero intero è contenuto in u „.

Essendo, per ipotesi, u una classe di numeri, si ha che $u \supset N$; moltiplicando allora la (3) membro a membro con la deduzione $u \epsilon K'N . \supset . u \supset N$, (P VI), e riducendo nell'Hp, (P IX), si ha

(4) $$u \epsilon K'N . 1 \epsilon u . u+1 \supset u : \supset : N = u.$$

Le prop. (3), (4) esprimono il principio d'induzione quando la proprietà che si considera è vera per il numero 1. Quando, come per l'esempio portato prima, la

proprietà è vera per numeri maggiori di 1, è vera cioè a partire da un numero qualunque a, allora il principio d'induzione prende la forma:

$$(5)\quad a \in N \,.\, u \in K'(a + N_0) \,.\, a \in u \,.\, u + 1 \supset u : \supset : (a + N_0) \supset u$$

" Se a è un numero intero, u è una classe di numeri o eguali o maggiori di a, a è un u, e il successivo di qualunque numero di u appartiene ad u, allora avremo che ogni numero eguale o maggiore di a è contenuto in u ".

Posto nella (5), $a = 1$, soppressa nell'Hp la prop. vera $1 \in N$, e osservando che $1 + N_0 = N$, si ha la prop. (3). Vedremo dalla teoria dei numeri interi che la prop. generale (5) è conseguenza della prop. (3).

*
* *

Osserviamo che non bisogna confondere il principio d'induzione matematica col *principio d'induzione* dei logici. Questo è espresso dalla formula $a \supset c \,.\, b \supset c : = : a \cup b \supset c$, (P VII), ed è adoperato, sotto una forma un po' diversa, che potrebbe chiamarsi di *induzione incompleta*, nelle scienze sperimentali. Verificato, p. es., che i corpi che sono stati sottoposti ad esperienza godono della proprietà di essere *porosi*, concludiamo, *per induzione*, che, *tutti i corpi sono porosi*, comprendendo nei *tutti* anche i corpi che non sono stati sottoposti ad esperienza.

Il principio d'induzione matematica ha quindi niente a che fare col principio d'induzione dei logici (*composizione per somma*) e potrebbe, più propriamente, esser chiamato *principio di deduzione completa*, poichè con esso si ammette vera una proprietà che sembrerebbe tale solo dopo un numero infinito di deduzioni.

*
* *

Del principio d'induzione matematica, o principio di *deduzione completa*, abbiamo fatto uso, ammettendo, p. es., la regola *Polisillogismo* (P I) con un numero finito qualunque di premesse. Ne abbiamo fatto uso per definire i segni *abc*, *abcd*, *abcde*, ...

*
* *

$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, m \,\varepsilon\, \mathrm{N} : \supset .\!\cdot\!.$

1. $\mathrm{num}\, u = 0 \,.=.\, a = \Lambda$
2. $\mathrm{num}\, u = m \,.\!\cdot\!. = .\!\cdot\!.\, u -= \Lambda : x \,\varepsilon\, u \,.\, \supset_x .$ $\mathrm{num}\,(u \cap - \iota x) = m - 1$ (Def)
3. $\mathrm{num}\, u = \infty \,.\!\cdot\!. = .\!\cdot\!.\, n \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0 \,.\, \mathrm{num}\, u = n :=$
4. $\mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\!\cdot\!. = .\!\cdot\!.\, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{num}\, u = n : -=_n : \Lambda$
5. $\mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, (\mathrm{N} \cup \iota 0 \cup \iota \infty)$

   [(α) . Hp . P2,4 . $u -= \Lambda \,.\!\cdot\!.\, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{num}\, u = n : -=_n :$ $\Lambda :: \supset :: \mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \mathrm{N}$

   (β) . Hp . P3,4 . $u -= \Lambda \,.\!\cdot\!.\, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{num}\, u = n : =_n :$ $\Lambda :: \supset :: \mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \iota \infty$

   (γ) . Hp . (α) . (β) . P VIII, X $: \supset : u -= \Lambda \,.\, \supset .$ $\mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, (\mathrm{N} \cup \iota \infty)$

   (δ) . Hp . P1 $: \supset : u = \Lambda \,.\, \supset .\, \mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \iota\, \mathrm{o}$

   Hp . (γ) . (δ) . P VIII, X $: \supset :$ P5]

$\mathrm{num}\, u, \mathrm{num}\, v \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0 : \supset .\!\cdot\!.$

6. $uv = \Lambda \,.\, \supset .\, \mathrm{num}\,(u \cup v) = \mathrm{num}\, u + \mathrm{num}\, v$
7. $uv -= \Lambda \,.\, \supset . \quad . \quad . \quad . \quad < \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$

Scriviamo il segno num u in luogo della frase *numero degli individui della classe u.* Conveniamo di dire che (P1), il numero degli u è zero quando la classe u è nulla. Diciamo (P2) che il numero degli u è eguale al numero intero m, quando u contiene individui ($u - = \Lambda$) ed essendo x un individuo qualunque di u, il numero degli u che non sono eguali ad x è eguale ad $m - 1$. Diciamo (P3) che il numero degli u è infinito quando non esiste un numero intero o nullo n tale che num $u = n$. Diciamo (P4) che il numero degli u è un numero (non nullo), o *è finito*, quando esiste almeno un individuo n di N tale che num $u = n$.

La P2 ci da il concetto di numero finito degli individui di una classe, o di *classe finita*, per mezzo del principio di deduzione completa. Dal significato di num $u = 0$ deduciamo quello di num $u = 1$, da questo quello di num $u = 2$, e così via.

***

Ponendo nella P2, 1 al posto di m, abbiamo

$$\text{(1)} \qquad \text{num}\, u = 1 \therefore = \therefore u - = \Lambda : \\ x \,\varepsilon\, u \,.\, \supset_x .\, \text{num}\,(u \frown - \iota x) = 0$$

Ora dalla P1 abbiamo che la prop. num $(u \frown - \iota x) = 0$ equivale alla prop. $u \frown - \iota x = \Lambda$; ovvero alla prop. $u \supset \iota x$. La (1) diviene

$$\text{(2)} \qquad \text{num}\, u = 1 \therefore = \therefore u - = \Lambda : x \,\varepsilon\, u \,.\, \supset_x .\, u \supset \iota x$$

Moltiplicando il secondo membro della (2) per la prop.

vera $x \in u . \supset_x . \iota x \supset u$, (P IV), e componendo, (P VII), la (2) diviene

(3) $\quad \text{num}\, u = 1 .\therefore = .\therefore u \mathbin{-}= \Lambda : x \in u . \supset_x . u = \iota x$

" Dire che il numero degli u è eguale ad 1, equivale a dire che la classe u contiene individui, e che qualunque sia l'individuo x di u, la classe u è eguale alla classe degli eguali ad x „.

Dunque il numero degli u come è stato definito comprende solo gli individui distinti della classe. Così, p. es., il numero degli individui della classe i cui individui sono 1, 1, 1, 2, 1, 3, 3, 1 è *tre* e non *otto.*

§ 3. — Le funzioni.

Ponendo i segni, p. es., sen, log, dinanzi ad un determinato numero reale, si ottiene un numero reale parimenti determinato ed unico. È noto che diciamo essere i numeri $\text{sen}\, a$, $\log a$, i valori che prendono le *funzioni* $\text{sen}\, x$, $\log x$, quando si pone x eguale ad a.

I segni ora indicati sono tali che *messi dinanzi ad un numero reale producono un numero reale.*

In generale se a, b sono classi, scriveremo $b \, \text{f} \, a$ al posto di, *segno che posto dinanzi ad un a produce un b.*

Abbiamo p. es. che $\text{sen} \in (1 \vdash\!\dashv (-1) \, \text{f} \, \text{q})$ e leggiamo " il segno *sen* è uno dei segni che posto dinanzi ad un numero reale produce uno dei numeri reali compresi nell'intervallo da 1 a -1 gli estremi inclusi; $\log \in (\text{q} \, \text{f} \, \text{Q})$ e leggiamo " il segno *log* è uno dei segni che posto di-

nanzi ad un numero reale positivo e diverso da zero, produce un numero reale „.

Se u è una classe sappiamo che con num u veniamo sempre ad indicare o un numero finito o nullo o infinito; abbiamo quindi che, num ϵ ((N $\cup \iota 0 \cup \iota \infty$) f K), cioè " il segno *num* è uno dei segni che posto dinanzi ad una classe produce un individuo della classe N $\cup \iota 0 \cup \iota \infty$ „.

Se u è una classe, sappiamo che $x \epsilon u$ è una prop.: dunque $(x\epsilon) \epsilon$ (P f K) cioè " $x\epsilon$ è uno dei segni che posto dinanzi ad una classe produce una prop. „.

Analogamente $\overline{x}\epsilon$ è un segno che posto dinanzi ad una prop. (contenente la lettera x) produce una classe.

Se u è una classe, abbiamo convenuto che K'u indichi una classe di u, quindi K' è un segno che posto dinanzi ad una classe produce una classe.

***

Come si fa in analisi, si può dire che ognuno dei segni che posto dinanzi ad un a produce un b, (b f a), è *un segno di* **funzione** *che fa* **corrispondere** *ad ogni a un b*, o, *è una* **corrispondenza** *degli a nei b.*

Stabilite, come faremo tra poco, le proprietà dei segni b f a, avremo individuato il concetto di *corrispondenza.*

***

Qualche volta il segno di funzione si pone dopo la variabile x; così p. es., con $x!$ indichiamo il *fattoriale di x.*

Se a, b sono classi, con b ʃ a potremo indicare " segno che posto dopo un a produce un b „ e si ha, p. e., che ! ϵ (N ʃ N).

Altri segni, pure adoperati in matematica, come i segni di esponente, non appartengono alle due classi ora considerate.

*
* *

$a, b \in \mathrm{K} . \supset :$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
1. & f \in b\,\mathbf{f}\,a :: = :: x \in a . \supset_x . fx \in b \therefore \\
 & \quad x, y \in a . x = y : \supset_{x,y} : fx = fy \\
2. & f \in b\,\mathbf{f}\,a . \supset . fa = \overline{y \in} (x \in a . fx = y : -=_x : \Lambda) \\
3. & f \in (b\,\mathbf{f}\,a)\,\mathrm{Sim} :: = :: f \in b\,\mathbf{f}\,a \therefore x, y \in a . x -= y \\
 & \quad : \supset_{x,y} : fx -= fy
\end{array}
\right\} \text{(Def)}
$$

La P1 si legge " Dire che f è un segno che posto dinanzi ad un a produce un b, equivale a dire che: qualunque sia l'x appartenente ad a, fx appartiene a b; e che qualunque sieno gli individui x, y eguali di a, allora sono eguali gli individui corrispondenti fx e fy ".

Abbiano, p. e., $\mathrm{tang} \in [\mathrm{q}\,\mathbf{f}\,(\mathrm{q} \frown - (2\,\mathrm{n} + 1)\,\pi/2)]$, mentre tang non è $\mathrm{q}\,\mathbf{f}\,\mathrm{q}$, poichè $\mathrm{tang}\, x$ è infinita e indeterminata quando x è uno dei numeri $(2\,\mathrm{n} + 1)\,\pi/2$.

Ammettiamo con la seconda parte della P1 che una corrispondenza degli a nei b sia sempre tale che ad individui eguali di a corrispondano individui eguali di b. A questa condizione soddisfano, p. es., le funzioni log, sen, tang, ..., num, $x \in$, $\overline{x \in}$, ...

La P2 si legge " Se f è un segno di corrispondenza degli a nei b, allora con fa indicheremo la classe degli individui y tali che si può sempre trovare almeno un individuo x di a per il quale si ha che $fx = y$ ". In altri

termini con fa indichiamo il complesso, (classe), dei valori che prende fx quando x prende tutti i valori di a.

Così, p. es., con sen q indichiamo il complesso dei valori che prende la funzione sen x quando al posto di x poniamo tutti gli individui di q; abbiamo sen q $= 1 \mapsto (-1)$. Analogamente $\log \mathrm{Q} = \mathrm{q}$; $\mathrm{tang}\,(\mathrm{q} \cap - (2n+1)\,\pi/2) = \mathrm{q}$.

Della convenzione espressa dalla P2 si è già fatto uso quando si è indicato con Nx la classe dei multipli di x, con $2\mathrm{N} - 1$ la classe dei numeri dispari, con $\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2$ la classe delle somme dei quadrati ecc.... (vedi pag. 74).

***

Il complesso di segni $f \,\epsilon\, (b\,\mathrm{f}\,a)$ Sim si legge " f è una corrispondenza *simile* degli a nei b „.

Con la P3 esprimiamo " Dire che f è una corrispondenza simile degli a nei b equivale a dire che, f è una corrispondenza degli a nei b, e che qualunque sieno gli individui x, y non eguali di a, anche fx e fy sono non eguali „.

Così, p. es., sen non è una corrispondenza simile dei q nei q, poichè, p. e., la funzione *seno* di uno qualunque dei numeri della classe $\{2\,\mathrm{n}\,\pi + \pi/6\{ \cup \}(2\,\mathrm{n} - 1)\,\pi - \pi/6\{$ è eguale ad 1/2.

Il *seno* è invece una corrispondenza simile tra i numeri della classe $0 \mapsto \pi/2$ e i numeri della classe Q o $0 \mapsto 1$; cioè si ha sen $\epsilon\, [\mathrm{Q}\,\mathrm{f}\,0 \mapsto \pi/2]$ Sim, e, sen $\epsilon\, [(0 \mapsto 1)\,\mathrm{f}\,(0 \mapsto \pi/2)]$ Sim. Si ha pure che, $\log \epsilon\, (\mathrm{q}\,\mathrm{f}\,\mathrm{Q})$ Sim.

La corrispondenza che si stabilisce tra i lati e gli angoli di due poligoni simili è una corrispondenza Simile.

La P1 definisce la corrispondenza qualunque; la P2 definisce il segno fa; e la P3 definisce la corrispondenza *Simile*.

*
* *

Il segno di funzione ora introdotto permette di esprimere in simboli molte frasi delle quali si fa spesso uso in matematica.

Occorre, p. e., in analisi definire la *funzione reale e monodroma di una variabile reale*. Se con fx, o, come si fa ordinariamente, con $f(x)$, si indica la funzione reale e monodroma della variabile reale x che si considera, abbiamo che le proprietà che devono verificarsi per il segno fx sono le seguenti: 1ª Per ogni numero reale a, fa deve rappresentare un numero reale, cioè, $a \varepsilon \mathrm{q} . \mathrm{Ɔ}_a . fa \varepsilon \mathrm{q}$; 2ª Se a, b sono numeri reali eguali anche fa è eguale ad fb, cioè, $a, b \varepsilon \mathrm{q} . a = b : \mathrm{Ɔ}_{a, b} : fa = fb$. Confrontando queste prop. con la P 1 di questo §, deduciamo che il segno f è un $\mathrm{q}\,\mathbf{f}\,\mathrm{q}$, cioè una corrispondenza tra numeri reali e numeri reali. Dunque in luogo di *funzione reale di una variabile reale*, si può scrivere $\mathrm{q}\,\mathbf{f}\,\mathrm{q}$.

Analogamente, se a, b sono numeri reali e la funzione reale e monodroma f è definita nell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$, (p. e., gli estremi compresi), abbiamo che in luogo di *funzione reale definita nell'intervallo* $a \vdash\!\dashv b$, si può scrivere $\mathrm{q}\,\mathbf{f}\,a \vdash\!\dashv b$.

Ordinariamente diciamo che n numeri (in generale n cose), sono *ordinati*, quando possiamo dire quale di essi è il *primo*, quale il *secondo*, ecc.: cioè quando è stata stabilita una corrispondenza tra gli n numeri e i numeri 1, 2,... n. Gli n numeri così ordinati diciamo che formano una *successione*, poichè anche nel linguaggio comune si dice che il *secondo* **segue** il *primo*, il *terzo* **segue** il *secondo*, ecc...

Essendo dunque n un numero intero, con $\mathrm{q}\,\mathbf{f}\,\mathrm{Z}_n$ indichiamo

la classe delle “ corrispondenze tra i numeri 1, 2, ... n e i numeri reali ”, indichiamo cioè tutte le *successioni* di n *numeri reali*. Se $f \epsilon$ q f Z_n, f rappresenta una determinata *successione di numeri reali*, i cui individui $f1, f2, \dots fn$, sono disposti in un *determinato ordine*, e non deve confondersi tale successione ordinata con la classe $f Z_n$, (P2), contenente gli individui $f1, f2, \dots fn$, *indipendente* dall'*ordine* nel quale si considerano i suoi individui.

Se $f \epsilon$ q f Z_n, scriveremo anche $f_1, f_2, \dots f_n$ in luogo di $f1, f2 \dots fn$, ritornando così all'ordinaria notazione della quale si fa uso in matematica per indicare n numeri $a_1, a_2, \dots a_n$, disposti in un determinato ordine.

Analogamente con q f N indichiamo *successione di infiniti numeri reali*, cioe *serie* di numeri reali; con Q f N *serie* di numeri reali positivi, ecc...

Volendo, p. e., indicare “ successione di n numeri *distinti* ”, cioè, due qualunque dei quali non sono eguali, scriveremo (q f Z_n) Sim, poichè per la corrispondenza Sim, ad individui distinti di Z_n, corrispondono individui distinti di q.

Dalle cose precedenti risulta che la successione di n individui di una classe, e quindi il concetto *d'ordine*, viene definita per mezzo della classe Z_n e del concetto di corrispondenza come è definito dalla P1.

*
* *

Possiamo, p. e., con i segni ora introdotti scrivere in simboli la prop. “ La somma di un numero finito di numeri reali è un numero reale ”. Abbiamo

$$n \epsilon 1 + \mathrm{N} \,.\, f \epsilon \mathrm{q\,f}\, Z_n : \supset : f1 + f2 + \dots + fn \,\epsilon\, \mathrm{q}$$

Analogamente per il prodotto.

" Sommando membro a membro un numero finito di eguaglianze tra numeri reali, si ottiene una nuova eguaglianza ".

$$n \epsilon 1 + N . f, f' \epsilon \mathrm{q\,f\,Z}_n : r \epsilon Z_n . \supset_r . fr = f'r .\therefore \supset .\therefore f1 + f2 + ... + fn = f'1 + f'2 + ... + f'n$$

che si legge " Se n è un numero maggiore di 1, f, f' sono due successioni di n numeri reali, e qualunque sia l'individuo r di Z_n si ha che $fr = f'r$, allora avremo che ... ".

Il *polisillogismo*, si scrive in simboli

$$n \epsilon 2 + N . f \epsilon \mathrm{P\,f\,Z}_n : r \epsilon Z_{n-1} . \supset_r . fr \supset f(r+1) .\therefore \supset .\therefore f1 \supset fn$$

che si legge " Se n è un numero maggiore di 2, f è una successione di n proposizioni, tale che una qualunque, successione di n proposizioni, tale che una qualunque, alla prima eccettuata, è conseguenza della precedente, allora avremo che ... ".

Analogamente si ha

$$n \epsilon 2 + N . f \epsilon \mathrm{P\,f\,Z}_n :: \supset ::$$
$$f1 \supset f2\,f3 ... fn : = : f1 \supset f2 . f1 \supset f3 ... f1 \supset fn .\therefore$$
$$f1 \cup f2 \cup ... \cup f(n\text{-}1) \supset fn : = : f1 \supset fn . f2 \supset fn ... . f(n\text{-}1) \supset fn$$

che corrispondono alle PVII.

Nelle ultime tre prop. si potrebbe porre al posto di P, P o K (prop. *aut* classi).

Per mezzo dei segni ora introdotti e del principio d'induzione matematica si può definire il prodotto logico, p. e., di un numero finito di classi o di prop., quando sia noto che cosa si intende per prodotto logico di *due* classi o prop.; si ha

$$n \epsilon 2 + N . f \epsilon (\mathrm{P \circ K})\,\mathrm{f}\,Z_n : \supset : f1\,f2\,f3 ... fn = (f1\,f2 ... f(n\text{-}1))\,fn \qquad \text{(Def)}$$

Ponendo successivamente al posto di n i numeri, 3, 4 ... si ha che, abc significa $(ab)c$, $abcd$ significa $(abc)d$, ... e così di seguito.

Analogamente si definisce il prodotto o la somma di un numero finito di numeri reali.

***

Chiamiamo in generale, *permutazioni* dei numeri 1, 2, 3,... n i gruppi di n numeri che si possono formare con i numeri 1, 2, 3,... n e tali che due di essi differiscano per l'ordine nel quale sono disposti gli individui del gruppo. Ognuno di tali gruppi è dunque una *successione* di n numeri *distinti* appartenenti al gruppo Z_n.

Allora se n è un numero intero con, $(Z_n \mathbf{f} Z_n)$ Sim, indichiamo la classe delle *permutazioni* dei numeri 1, 2, ... n. È necessaria la indicazione Sim, poichè con $Z_n \mathbf{f} Z_n$ indichiamo una successione di n dei numeri interi appartenenti alla classe Z_n e quindi $Z_n \mathbf{f} Z_n$ rappresenta la classe delle *permutazioni con ripetizioni* o *complete* dei numeri 1, 2,... n. Così, p. e., se $f \epsilon Z_4 \mathbf{f} Z_4$ si può avere $f1 = 1$, $f2 = 3$, $f3 = 1$, $f4 = 1$.

Sia f una successione di n numeri reali e g una permutazione dei primi n numeri, $(f \epsilon \mathrm{q} \mathbf{f} Z_n ; g \epsilon (Z_n \mathbf{f} Z_n)$ Sim), allora $f(g1)$, $f(g2) ... f(gn)$ rappresenta una permutazione qualunque degli individui della successione f.

Ciò permette di tradurre in simboli la proprietà *commutativa*, in generale, p. e., del prodotto logico: Si ha

$$n \epsilon 1 + \mathrm{N} \,.\, f \epsilon (\mathrm{P} \circ \mathrm{K}) \mathbf{f} Z_n \,.\, g \epsilon (Z_n \mathbf{f} Z_n) \,\mathrm{Sim} : \supset :$$
$$f1\, f2\, f3 \dots fn = f(g1)\, f(g2)\, f(g3) \dots f(gn).$$

*
* *

Le seguenti prop. esprimono proprietà delle corrispondenze definite con le P1-4. Lasciamo al lettore la cura di dimostrarle.

$a, b, c, d, s \in \mathrm{K} . m, n \in \mathrm{N}$

4. $f \in b \mathfrak{f} a . c \supset a : \supset : f \in b \mathfrak{f} c$
5. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \supset : fc \supset fa$
6. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \supset . f \Lambda = \Lambda$
7. $. \quad . \quad . \quad . \quad . b \supset c : \supset : f \in c \mathfrak{f} a$
8. $f \in c \mathfrak{f} a . f \in c \mathfrak{f} b : \supset : f \in c \mathfrak{f} (a \cup b)$
9. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \supset : f(a \cup b) = fa \cup fb$
10. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \supset : f(a \cap b) \supset fa \cap fb$
11. $f, g \in b \mathfrak{f} a .\,\therefore \supset \,\therefore f = g : = : x \in a . \supset_x . fx = gx$ (Def)
12. $f \in b \mathfrak{f} a . g \in c \mathfrak{f} b . x \in a : \supset : (gf)x = g(fx)$ (Def)
13. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \supset : gf \in c \mathfrak{f} a$
14. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . h \in d \mathfrak{f} c : \supset : h(gf) = (hg)f = hgf$
15. $f \in s \mathfrak{f} s . x \in s : \supset : f^1 x = fx$ (Def)
16. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \supset : f^{m+1} x = ff^m x$ (Def)
17. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \supset . f^m \in s \mathfrak{f} s$
18. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \supset . f^m f^n = f^{m+n}$
19. $f, g \in s \mathfrak{f} s . fg = gf : \supset : f^m g^n = g^n f^m$
20. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \supset . (fg)^m = f^m g^m$
21. $f \in a \mathfrak{f} \mathrm{Z}_n . \supset . \mathrm{num}(f\mathrm{Z}_n) \leqq n$
22. $f \in (a \mathfrak{f} \mathrm{Z}_n) \mathrm{Sim} . \supset . \mathrm{num}(f \mathrm{Z}_n) = n$

§ 4. — L'inversione.

$a, b \,\epsilon\, \mathrm{K} \,.\supset:$

1. $f \epsilon b \,\mathrm{f}\, a \,.\, y \epsilon b :\supset: \bar{f} y = a \frown \overline{x \epsilon} (fx = y)$ (Def)
2. $. \quad . \quad . \quad . \, x \epsilon a \,.\, y \epsilon b :\supset: fx = y \,.=.\, x \epsilon \bar{f} y$
3. $f \epsilon (b \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{Sim} \,.\, y \epsilon b :\supset: \mathrm{num}\, \bar{f} y \,\epsilon\, (\iota 1 \cup \iota 0)$
4. $f \epsilon (b \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{Sim} \,.\, x \epsilon a \,.\, y \epsilon b :\supset: fx = y \,.=.\, x = \bar{f} y$
5. $f \epsilon (b \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{sim} \,.\!\therefore = .\!\therefore f \epsilon (b \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{Sim} : y \epsilon b \,.\supset_y .$
   $\mathrm{num}\, \bar{f} y = 1$ (Def)
6. $f \epsilon (b \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{sim} \,.\, x \epsilon a \,.\, y \epsilon b :\supset: fx = y \,.=.\, x = \bar{f} y$
7. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\supset.\, \bar{f} \epsilon (a \,\mathrm{f}\, b) \,\mathrm{sim}$
8. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\supset: fa = b \,.\, \bar{f} b = a$
9. $. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\supset.\, f \epsilon (a \,\mathrm{f}\, b) \,\mathrm{Sim}$
10. $f \epsilon (b \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{Sim} \,.\supset.\, f \epsilon (fa \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{sim}$
11. $\mathrm{num}\, a \,\epsilon\, \mathrm{N} :\supset: f \epsilon (a \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{Sim} \,.=.\, f \epsilon (a \,\mathrm{f}\, a) \,\mathrm{sim}$

Il segno $\bar{f}$ si legge, f *inversa di.* Stabiliamo con la P1, di indicare con $\bar{f} y$ la classe degli individui x di a i quali sono tali che $fx = y$. Definendo la funzione *seno* come una corrispondenza tra i numeri reali q e i numeri reali dell'intervallo $1 \vdash\!\dashv (-1)$, allora $\overline{\mathrm{sen}}\, y$, (*seno inverso* di y — comunemente *arco che ha per seno* y), indica la classe dei numeri x tali che $y = \mathrm{sen}\, x$. Se y è, come si è supposto, un numero dell'intervallo $1 \vdash\!\dashv (-1)$, allora la classe $\overline{\mathrm{sen}}\, y$ non è nulla e il numero dei suoi individui è infinito. Se definiamo sen come un q f q e prendiamo y comunque nella classe q, allora $\overline{\mathrm{sen}}\, y$ può esser nulla se non

si considera la classe dei numeri immaginari. La classe $\overline{\text{tang}}\, y$ non è nulla qualunque sia il numero reale y.

La P2 esprime che se f è una corrispondenza qualunque degli a nei b, x è un a e y è un b, allora dalla relazione $fx = y$ possiamo sempre passare alla relazione $x \,\epsilon\, \overline{f} y$ e viceversa. Così, p. e., dalla relazione $\text{sen}\, \pi/6 = 1/2$ passiamo alla relazione $\pi/6 \,\epsilon\, \overline{\text{sen}}\, 1/2$ ($\pi/6$ è uno degli archi che hanno per seno $1/2$) e non si può scrivere $\pi/6 = \overline{\text{sen}}\, 1/2$, poichè si ha, come è noto,

$$\overline{\text{sen}}\, 1/2 = \{2\text{n}\pi + \pi/6\} \cup \{(2\text{n} - 1)\pi - \pi/6\}.$$

La P3 esprime che se f è una corrispondenza simile degli a nei b e y è un b, allora il numero degli individui della classe $\overline{f}\, y$ o è eguale ad 1 o è eguale a zero: il che equivale a dire (§ 2) che o tutti gli individui di $\overline{f}\, y$ sono eguali tra loro, o la classe $\overline{f} y$ è nulla. Se consideriamo la funzione tang come una corrispondenza simile tra le classi $0 \vdash \pi/2$, q, abbiamo che $\overline{\text{tang}}\, 1 = \pi/4$ e $\overline{\text{tang}}\, (-1) = \Lambda$. Se definiamo invece la funzione tang come una corrispondenza tra $(-\pi/2)(\pi/2)$ e q allora $\overline{\text{tang}}\, y$, qualunque sia il numero reale y, non è nulla e contiene un solo individuo.

La P4 esprime che se f è una corrispondenza Simile degli a nei b, x è un a e y è un b, allora si può passare dalla relazione $fx = y$ alla relazione $x = \overline{f}\, y$ e viceversa. Così per la funzione tang definita come sopra si passa da $\text{tang}\, \pi/4 = 1$ a $\pi/4 = \overline{\text{tang}}\, 1$. Se x, y sono numeri reali e x è positivo dalla relazione $\log x = y$ si passa alla relazione $x = \overline{\log}\, y$ e viceversa. Si confronti la P2 con la P4.

***

Con la P5 definiamo una nuova classe di corrispondenze simili. Indichiamo queste col segno sim. Diciamo che f è una corrispondenza simile degli a nei b, quando f è una corrispondenza Simile degli a nei b, e qualunque sia l'y appartenente a b la classe degli eguali ad $\overline{f}y$ contiene un solo individuo, o, il che equivale per le cose precedenti, non è nulla (P3).

Così, p. e., mentre sen è una corrispondenza Simile tra $0 \vdash\!\dashv \pi/2$ e q, non è una corrispondenza simile tra le medesime classi, poichè esistono degli y in q tali che la classe $\overline{f}y$ non contiene individui. La funzione log è una corrispondenza Simile e simile tra Q e q, poichè non esiste un q che non sia log di un Q e di uno solo.

Non avrebbe, p. e., senso la notazione $(\mathrm{q}\,\mathbf{f}\,Z_n)$ sim ove n è un numero intero, mentre come è noto $(\mathrm{q}\,\mathbf{f}\,Z_n)$ Sim indica le successioni di n numeri reali diversi tra loro.

La P6 esprime che anche per le corrispondenze simili si passa dalla relazione $fx = y$ alla relazione $x = \overline{f}y$ e viceversa.

La P7 esprime che se f è una corrispondenza simile degli a nei b, $\overline{f}$ è una corrispondenza pure simile dei b negli a.

Da questa proprietà risulta, p. e., che le ordinarie corrispondenze tra i lati dei poligoni simili sono corrispondenze simili; sono pure corrispondenze simili le ordinarie proiettività e le corrispondenze Cremoniane, quando dai punti dei due spazi si escludano i punti fondamentali.

La P9 esprime che ogni corrispondenza simile è Simile; la proprietà inversa non è vera; e se f è una corrispondenza Simile degli a nei b, allora, (P10), f è una corrispondenza simile tra a e fa.

La P11 esprime che se il numero degli a è finito allora si può al segno Sim sostituire il segno sim e viceversa in ogni corrispondenza degli a in se stessi.

Così, p. es., per indicare la classe delle permutazioni dei primi n numeri si può scrivere indifferentemente $(Z_n \, \mathrm{f} \, Z_n)$ Sim o $(Z_n \, \mathrm{f} \, Z_n)$ sim.

***

Il segno $x\epsilon$ posto dinanzi ad una classe produce una prop., e posto dinanzi a classi non eguali produce prop. non equivalenti. Dunque $x\epsilon$ è un segno di corrispondenza Simile tra K e P. Se a è una classe e indichiamo con p_x la prop. $x \epsilon a$, abbiamo $x \epsilon a = p_x$ e quindi per la P4 possiamo passare da questa relazione alla relazione $a = \overline{x \epsilon} (p_x)$ e viceversa. Il segno $x\epsilon$ introdotto nel § 3, Cap. III, soddisfa dunque alle leggi del segno d'inversione ora introdotto.

***

Il segno num posto dinanzi ad una classe produce un individuo della classe $N \cup \iota 0 \cup \iota \infty$ (§ 2, P 6), ma a classi non eguali possono corrispondere individui eguali di $N \cup \iota 0 \cup \iota \infty$.

Il segno num è dunque il segno di una corrispondenza tra K e $N \cup \iota 0 \cup \iota \infty$, che non appartiene alle corrispondenze Simili o simili. Se dunque a è una classe e

$n \,\epsilon\, (N \cup \iota 0 \cup \iota \infty)$, dalla relazione $\text{num}\, a = n$ si passa, (P2), alla relazione $a \,\epsilon\, \overline{\text{num}\, n}$ e viceversa. Se, dunque, $n \,\epsilon\, (N \cup \iota 0 \cup \iota \infty)$ il segno $K \cap \overline{\text{num}\, n}$ indica *il complesso delle classi a tali che* $\text{num}\, a = n$. In simboli

$$n \,\epsilon\, (N \cup \iota 0 \cup \iota \infty) \,.\, \supset .\, K \cap \overline{\text{num}\, n} = K \cap \overline{a} \,\epsilon\, (\text{num}\, a = n)$$

Si ha, p. e., che $Np \,\epsilon\, K \cap \overline{\text{num}\, \infty}$ " Np è una classe che ha un numero infinito di individui "; $Z_8 \,\epsilon\, K\text{'}N \cap \overline{\text{num}\, 8}$, " Z_8 è una classe di numeri interi che ha *otto* individui ".

* * *

Ordinariamente si dice che " Fare le *combinazioni* di m lettere ad n a n, significa formare tutti i gruppi possibili con n delle m lettere, per modo che un gruppo differisca da ogni altro per qualche lettera ".

Le m lettere possono esser considerate come individui di una classe s. I gruppi di lettere che possono formarsi sono classi formate con individui di s, cioè sono $K\text{'}s$. Ogni individuo della classe $K\text{'}s$ deve contenere n individui, cioè deve appartenere alla classe $\overline{\text{num}\, n}$. Con $(Ks) \cap \overline{\text{num}\, n}$, o anche, $(Ks)\overline{\text{num}\, n}$ (sopprimendo cioè il segno $\cap$), indichiamo dunque le combinazioni n ed n degli individui di s, poichè le classi che compongono $(Ks)\,\overline{\text{num}\, n}$ sono indipendenti dall'ordine nel quale si considerano i loro individui.

Nelle *disposizioni* un gruppo differisce da ogni altro o per qualche lettera o per l'ordine delle lettere. Quindi ogni disposizione degli s, n ad n è una successione di n

individui (necessariamente distinti), e quindi le disposizioni di s, n ad n è indicata da $(s \, \mathbf{f} \, Z_n)$ Sim (pag. 111).

Analogamente con $(s \, \mathbf{f} \, Z_m)$ indichiamo le *permutazioni* degli m individui di s.

Così, p. e., $K' Z_{12} \cap \overline{\text{num}}\, 8$ indica le *combinazioni* 8 ad 8 dei primi 12 numeri interi: $(Z_{15} \, \mathbf{f} \, Z_6)$ Sim le *disposizioni* 6 a 6 dei primi 15 numeri: $Z_{30} \, \mathbf{f} \, Z_{30}$ le *permutazioni* dei primi 30 numeri interi.

Abbiamo le note formule

$$m, n \, \epsilon \, N \, . \, m \overline{\gtrless} n \, . \, s \, \epsilon \, K \cap \overline{\text{num}}\, m \, : \, \supset :$$

$$\text{num} \{ (Ks) \, \overline{\text{num}}\, n \} = \frac{m(m-1) \ldots\ldots (m-n+1)}{1 \, . \, 2 \, . \ldots n} = \frac{m!}{(m-n)! \, n!}$$

$$\text{num} \{ (s \, \mathbf{f} \, Z_n) \, \text{Sim} \} = m(m-1) \ldots\ldots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$\text{num} \{ (s \, \mathbf{f} \, Z_m) \, \text{Sim} \} = 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots\ldots m = m!$$

§ 5. — Le definizioni di prima e seconda specie.

Un segno, o un complesso di segni x, *si definisce*, quando ad esso si attribuisce il medesimo significato di un complesso di segni già noto a.

Se x ed a non contengono lettere indeterminate, allora la definizione si presenta sotto la forma simbolica

(1) $$x =_{\text{Def}} a$$

ove il segno $=_{\text{Def}}$ si legge “ eguale per definizione ”, o “ identico ”.

In luogo della (1) si scrive anche

(1)′ $x = a$ (Def)

sopprimendo l'indice Def al segno = e ponendo l'indicazione Def a destra della relazione $x = a$.

Se x ed a contengono lettere indeterminate, allora la definizione si presenta sotto la forma simbolica

(2) $h \,.\, \supset .\, x = a$ (Def)

ove h contiene le lettere indeterminate di x ed a e il segno (Def) si scrive a destra della prop. che definisce il segno x.

Nella (2) il nome del segno = varia col variare degli enti x ed a, secondo, cioè, che x, a sono o prop., o classi, o individui di una classe.

Sono della forma (1), p. e., le definizioni seguenti

$$\mathrm{q} = \mathrm{Q} \,.\cup.\, -\mathrm{Q} \,.\cup.\, \iota 0$$
$$\mathrm{Np} = (1 + \mathrm{N}) \frown - [(1 + \mathrm{N}) \times (1 + \mathrm{N})]$$

Sfera = Luogo dei punti equidistanti da un punto.
Triangolo isoscele = triangolo che ha due lati eguali.

Sono ancora della forma (2) le definizioni seguenti

$a, b \,\epsilon\, \mathrm{N} : \supset : a$ *è primo con* $b \,.=.\, \mathrm{D}(a, b) = 1$

$m, n \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, m \geqq n \,.\, s \,\epsilon\, \mathrm{K} \frown \overline{\mathrm{num}\, m} : \supset :$ Combinazioni degli s, n ad $n \,.=.\, \overline{(\mathrm{K}s)}\, \mathrm{num}\, n$

. . . . $: \supset :$ Disposizioni degli s, n ad $n. = .\, (s \,\mathrm{f}\, \mathrm{Z}_n)\, \mathrm{Sim}$

***

Essendo u una classe di numeri reali si voglia, p. e., definire il *massimo* e il *minimo* della classe u. Le parole *massimo* e *minimo* hanno nel linguaggio comune un significato preciso, e dicendo, p. e.. *massimo degli* u si intende il più grande degli u. In questo caso noi conserveremo alle parole, massimo, minimo, il significato che esse hanno nel linguaggio comune, e quindi più che definire tali parole, esprimeremo il loro significato per mezzo dei segni $=$, $>$, $<$, o anche, se vogliamo, definiremo il complesso di segni

$$a = \text{massimo degli } u$$

Scriveremo i segni max, min, al posto delle parole massimo, minimo. Avremo

$$u \in \text{K}'\text{q} :: \supset :: a = \max u \therefore = \therefore a \in u : x \in u \,.\, \supset_x . \, x \leqq a$$

" Se u è una classe di numeri reali, allora; dire che a è eguale al massimo degli u equivale a dire che a è un u, e qualunque sia l'individuo x di u, x è o eguale o minore di a ".

Analogamente per il minimo

$$u \in \text{K}'\text{q} :: \supset :: a = \min u \therefore = \therefore a \in u : x \in u \,.\, \supset_x . \, x \geqq a$$

Abbiamo p. e.

$$a = \max \text{N} \,.\, = \,.\, \Lambda \quad ; \quad \min \text{N} = 1$$

$$a = \max \text{q} \,.\, \cup \,.\, a = \min \text{q} := : \Lambda$$

Come definizione della forma (2), abbiamo ancora, p. e.,

$$a, b \in \mathrm{N} \,.\, \supset .\, \mathrm{quot}(a, b) = \max(\mathrm{N}_0 \cap \overline{x \in (bx \leqq a)})$$

$$. \quad . \quad . \quad . \supset .\, \mathrm{rest}\,(a, b) = a - \mathrm{quot}\,(a, b).$$

***

Chiameremo di *prima specie* le definizioni della forma (1), e di *seconda specie* le definizioni della forma (2). Le definizioni di prima e seconda specie costituiscono il gruppo delle definizioni *nominali*, e non sono *necessarie*, poichè il segno x, che per mezzo di esse si definisce, può essere espresso per mezzo di un gruppo di segni avente già significato noto. Tali definizioni sono però *utilissime*, tutte le volte che ad un gruppo di segni complicati sostituiscono un unico segno o un gruppo semplice di segni. Le definizioni di prima e seconda specie, si può quindi dire che in sostanza servono ad abbreviare e le notazioni e le locuzioni.

Se le due specie di definizioni ora considerate hanno a comune i precedenti caratteri, esse differiscono però tra loro, e per la forma simbolica sotto la quale si esprimono, e per altri caratteri che ora esamineremo.

Si voglia, p. es., definire il segno D (a, b), *massimo divisore di* a, b. Scriviamo

$$(1) \qquad a, b \in \mathrm{N} \,.\, \supset .\, \mathrm{D}(a, b) = \max \, \} \, \mathrm{N} \cap a/\mathrm{N} \cap b/\mathrm{N} \, \{ \qquad (\mathrm{Def})$$

che si legge " D (a, b), indica il massimo dei numeri interi che sono divisori di a e di b ", poichè, il segno, p. es., a/N indica in generale *divisore di* a, (pag. 86). Con tale definizione, diamo significato al segno D (a, b), solo quando

a, b sono numeri interi, e non diamo, p. es., significato al segno D(3/4, 5/7). La limitazione posta nella (1), con l'Hp, $a, b \in N$, dipende dalla natura dello studio che intendiamo fare; noi vogliamo, p. e., trattare la sola teoria dei numeri interi e per il segno D, assumiamo la def. (1), riservandoci poi di estendere il segno D anche ai razionali quando vorremo studiare la teoria del massimo divisore dei numeri razionali.

Volendo, p. es., definire il segno $-$, o meglio il complesso di segni $c = a - b$, ove a, b, c sono numeri interi, quando sia già noto il significato del segno $+$, scriviamo

$$(2) \qquad a, b, c \in N : \supset : c = a - b . = . c + b = a$$

che si legge " Con $c = a - b$ indichiamo che a è la somma di b con c ". Risulterà poi dalle proprietà ammesse per i numeri interi, che $a - b$ non può essere eguale ad un N quando $a \overline{\overline{<}} b$,

$$a, b \in N . a \overline{\overline{<}} b : \supset : c \in N . c = a - b . =_c . \Lambda,$$

che $a - b$ è un numero, quando $a > b$

$$a, b \in N . a > b . \supset . a - b \in N$$

e quindi giungeremo all'ordinaria definizione " La differenza tra due numeri disuguali ($a - b$, con $a > b$) è il numero che sommato col minore di essi dà per somma il maggiore ", ma non mai alla seguente, più ordinaria forse di quella che precede, " La differenza tra due numeri è ciò che si ottiene *togliendo* il maggiore dal minore ", poichè il significato della parola *togliere* deve essere definito, e, quando, come si fa spesso, non si definisce, l'apparente definizione è un *circolo vizioso.*

Anche in questo caso potremo estendere ai numeri reali, (agli immaginari), il significato del segno $a - b$ (esteso che sia già a questi il significato del segno $+$). Se, p. es., poniamo

$$(3) \qquad a, b, c \in (\mathrm{q} - \mathrm{N}) : \supset : c = a - b = c + b = a \qquad \text{(Def)}$$

allora sommando membro a membro questa prop. con la (2), e semplificando con le note regole, si ha la prop.

$$(4) \qquad a, b, c \in \mathrm{q} : \supset : c = a - b = c + b = a$$

che è un **teorema** *conseguenza* delle definizioni (2) e (3).

Si osservi che nella Hp della (3) non si sarebbe potuto porre $a, b \in \mathrm{q}$, poichè $\mathrm{N} \supset \mathrm{q}$ e quando $a, b \in \mathrm{N}$, il segno $a - b$ ha già ricevuto un significato preciso.

Data la def. (2) niente impedisce di prendere la (3) in modo che non ne risulti la (4), in modo cioè che il segno $-$ non soddisfi per gli N e per i q alle medesime proprietà. Come, p. es., se si ponesse

$$a, b, c \in (\mathrm{q} - \mathrm{N}) : \supset : c = a - b = c + 2b = a$$

cioè si indicasse con $c = a - b$ che c sommato col doppio di b dà per somma il numero a.

Con ciò però si contravverrebbe alla regola, tanto utile, della *conservazione delle proprietà dei segni*, o *legge formale.*

In generale dunque la definizione della seconda specie

$$h . \supset . x = a$$

è relativa agli individui di una classe u. Essa può poi essere estesa agli individui della classe v che contiene u,

dandola prima per i v che non sono u, $(v - u)$. È l'ipotesi h che stabilisce quanto vi è di *relativo* nella definizione della seconda specie.

***

In certi casi la definizione della seconda specie non può darsi mediante un'unica proposizione. Ciò avviene, p. es., tutte le volte che per definire un segno dobbiamo far uso del principio di induzione.

Vogliamo, p. es., definire il segno a^m ove a è un numero reale, e m un numero intero. Scriviamo

$$(1) \qquad a \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, m \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a^1 = a$$

$$(2) \qquad \ldots \ldots \,.\, \supset .\, a^{m+1} = a^m \times a$$

Ponendo nella (2), $m = 2$ si ha $a^2 = a^1 \times a$, e quindi per mezzo della (1) resta definito il segno a^2. Ponendo nella (2), $m = 3$ si ha $a^3 = a^2 \times a$ e il segno a^3 resta definito mediante il segno a^2 che ha già significato noto. Così continuando si ha per induzione il significato del segno a^m ove m è un numero intero qualunque.

L'ordinaria definizione " La potenza m-esima, con $m > 1$, di un numero reale positivo è il prodotto di m fattori eguali ad a ", è conseguenza della def. espressa dalle prop. (1), (2). In simboli diviene;

$$(3) \quad a \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, m \,\epsilon\, 1 + \mathrm{N} \,.\, f \,\epsilon (\iota\, a\, \mathrm{f}\, \mathrm{Z}_m) \,.\, \supset .\, a^m = f1 \times f2 \times \ldots \times fm$$

La (1) e la (3) possono essere assunte come definizione del segno a^m, in tal modo si fa uso del concetto d'*ordine*,

conseguenza di quello di *induzione* e di numero intero, in luogo del solo principio di *induzione.*

Definita la potenza intera positiva, possiamo definire la potenza intera negativa, nel modo seguente:

(4) $$a \,\epsilon\, (\mathrm{q} - \iota 0) \,.\, m \,\epsilon - \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a^m = 1/a^{-m}$$

e questa def. è ancora della seconda specie.

Qui la *legge formale*, per il segno a^m è verificata per le prop. che sono, p. es., conseguenze delle prop. (1), (2). Abbiamo, p. es.

(5) $$a \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, m, n \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a^m \times a^n = a^{m+n}$$

e dalla (4)

(5)' $$a \,\epsilon\, (\mathrm{q} - \iota 0) \,.\, m, n \,\epsilon - \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Sommando membro a membro le (5), (5)' e ricordando che

$$\mathrm{N} \cup - \mathrm{N} = \mathrm{n} - \iota 0$$

abbiamo

(6) $$a \,\epsilon\, (\mathrm{q} - \iota 0) \,.\, m, n \,\epsilon\, (\mathrm{n} - \iota 0) \,.\, \supset .\, a^m \times a^n = a^{m+n}$$

In modo analogo si definisce la *somma* di due numeri interi, quando si ammetta abbia significato la frase *successivo di a*, (vedi § 6), ove a è un numero intero. Poniamo, scrivendo suc al posto di successivo,

(7) $$a \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a + 1 = \mathrm{suc}\, a$$

(8) $$a, b \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

Resta così, per induzione, indicato il significato, p. es., di $a + 5$; poichè $a + 5$ è il successivo di $a + 4$, questo

il successivo di $a+3$, questo il successivo di $a+2$, questo il successivo di $a+1$, questo il successivo di a. Col procedimento inverso troviamo $a+5$, dato che sia a e scritta la serie naturale dei numeri interi.

Si può osservare che la prop. (8) presa da sola, non ha la forma assegnata alle definizioni di seconda specie, poichè il segno $a+b$ che si tratta di definire comparisce nel secondo membro dell'equivalenza della Ts. Tale secondo membro ha però sempre, in virtù della (7), un significato preciso quando a b si dànno, *successivamente*, i valori 1, 2, 3,... La medesima osservazione vale per la (5). Le definizioni date dalle coppie di prop. (4), (5) e (7), (8) sono della seconda specie quando si tenga conto del principio di induzione.

Abbiamo, p. es., dalle prop. (7), (8):

$a \epsilon \mathrm{N} . \supset .$

(α). $a+1 = \mathrm{suc}\, a$

(β). $a+2=(a+1)+1$

(γ). $a+3=(a+2)+1$

(δ). $a+4=(a+3)+1$

. . . . . .

ciascuna delle def. (α), (β), (γ), (δ),... è della seconda specie; la (α) in modo assoluto; la (β) dipendentemente da (α); la (γ) da (β), e così di seguito. Esse definiscono successivamente i segni $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$,... e uno qualunque di questi, $a+1$ eccettuato, è definito mediante il precedente e il primo.

Si potrebbe di tali definizioni, che frequentemente si usano in matematica, formare un gruppo a parte e chiamarlo, gruppo delle *definizioni induttive di seconda specie.*

§ 6. — Definizioni di terza specie.

Non tutte le definizioni possono esser ridotte ad una delle forme considerate nel § precedente. Ciò avviene tutte le volte che le idee indicate dal segno x non possono esser espresse mediante altre idee più semplici, cioè, tutte le volte che il concetto indicato dal segno x è un concetto primitivo.

Non abbiamo, p. e., definiti i segni $\supset$, $\cap$, $-$ per le prop., come non si è definita la proposizione; in matematica, p. e. non si definisce il *numero intero*, il *punto*, la *retta*, il *moto* .....

Degli enti non definiti x che si introducono in una scienza si ammettono come primitive certe proprietà dalle quali possono dedursi logicamente le altre. Si può dire così che il segno x si è *definito in se stesso*, mentre con le forme considerate nel § precedente è *definito fuori di se stesso.*

Chiameremo *definizione di terza specie*, ogni definizione di un ente in se stesso.

Logicamente, tale forma di definizione dovrebbe essere esposta per la prima, non avendosi esempi di enti x che si possano definire mediante definizioni di prima o seconda specie, senza che, con definizioni di terza specie, si sieno ottenuti altri enti. L'ordine da noi scelto è giustificato dal fatto che la forma espositiva è più semplice per le definizioni di 1ª e 2ª specie che per quelle di terza.

*
* *

Abbiamo già accennato che la definizione di un ente x in se stesso, si dà assegnando all'ente x un sistema α di proprietà dalle quali *tutte* le altre proprietà dell'ente x possano logicamente esser dedotte. Se il sistema di proprietà α si vuole scegliere in modo che ognuna delle proprietà del sistema sia la più *semplice* possibile, allora è evidente che occorre un'analisi accurata del complesso delle proprietà dell' ente x, e delle mutue dipendenze logiche di tali proprietà. Dopo una simile analisi, accurata, minuziosa, e faticosa a farsi, può essere fissato il sistema α, e, la teoria dell'ente x può essere svolta partendo dalle proprietà del sistema α, e certo sotto una forma facile e scientificamente rigorosa. È evidente quale sia così l'importanza della definizione di terza specie anche nel campo elementare e didattico. Eppure, sebbene la definizione di un ente in se stesso sia da molto tempo nota e adoperata dai matematici, essa è quasi affatto ignorata nel campo elementare, come ce ne fanno fede anche i più recenti trattati, ove si ripetono costantemente quei non sensi ai quali si dà il nome di, *definizione di grandezza, di numero intero, di numero irrazionale...*

Può il lettore nei volumi della " *Rivista di matematica* ", leggere quanto è stato scritto contro i volgari non sensi contenuti in gran parte dei libri di matematica elementare. Noi ci limiteremo ad analizzare ciò che riguarda la teoria dei numeri interi, con lo scopo di giungere alla definizione dell'ente N in se stesso, e dare un esempio dell'analisi che occorre fare, per definire un ente con una definizione di 3ª specie.

***

Dei termini che si usano in aritmetica, parte appartengono al linguaggio comune con un significato identico a quello che hanno, o almeno dovrebbero avere, in aritmetica; parte invece non appartengono al linguaggio comune, o almeno hanno in questo un significato diverso da quello che loro si attribuisce in aritmetica. Questi ultimi termini, la maggior parte dei quali sono usati nell'aritmetica superiore, sono definiti regolarmente, mediante definizioni di 1ª o 2ª specie, facendo uso dei primi termini, come, per es., *congruente modulo...*, *residui quadratici...*

Possiamo dunque ridurre l'analisi dei termini, ai primi, cioè a quelli propri delle più elementari proprietà dei numeri interi.

Alcuni di questi termini come, *numero primo*, *massimo divisore*, *minimo multiplo*, *primo con...*, sono definiti, per mezzo di definizione di 1ª o 2ª specie, mediante altri termini introdotti prima. Qualche osservazione che potrebbe farsi alla forma logica di talune di queste definizioni non trova qui il suo posto.

Fra gli altri termini ve ne sono di perfettamente sinonimi, come *sommare*, *addizionare*, *aggiungere*; *togliere*, *sottrarre*...; ed è chiaro che basta ne sia definito uno perchè risultino definiti gli altri, che possono naturalmente essere soppressi, per quanto la *varietà* del linguaggio possa consigliare di lasciarli.

Altri sono forme grammaticali diverse di una stessa parola, come *somma* e *sommare*. Altri sono inutili come *termini*, *fattori*, *moltiplicando*, *moltiplicatore*, *dividendo*,

divisore, minuendo..., potendosi sempre dare alla frase una forma tale da escludere quei termini. Così, p. es., in luogo di dire " Moltiplicando *dividendo* e *divisore* per uno stesso numero, il quoto non muta e il resto rimane moltiplicato per quel numero ", si può dire " Moltiplicando due numeri per uno stesso numero, il loro quoto non muta e il resto... ". — Se per amore di varietà nel linguaggio tali termini si vogliono lasciare, niente impedisce di farlo, purchè si riesca a definirli (pag. 148).

Noi, che non dobbiamo occuparci della varietà del linguaggio, trascuriamo i termini sinonimi e consideriamo solo, p. es., i seguenti: *eguale, somma, maggiore, minore, differenza, prodotto.*

Ammesso noto il significato dei termini *eguale, somma*, e quindi del segno $+$ che, in certo modo, corrisponde a *somma*, possiamo definire, con def. di 2ª specie, i termini, *maggiore, minore*, e quindi i segni $>$, $<$.

$$a, b \in \mathrm{N} : \supset : a > b \,. = . \, a \in b + \mathrm{N}$$
$$. \quad . \quad . \quad : \supset : a < b \,. = . \, b > a$$

" Dire che il numero a *è maggiore del* numero b equivale a dire che a è la somma di b con un numero ", o, sotto una forma più simile a quella del linguaggio comune " Diciamo che il numero a *è maggiore del* numero b, quando a è la somma di b con un numero ". In modo analogo si legge la definizione del segno $<$, o meglio della relazione $a < b$, con la quale diciamo che " Dire che a è minore di b *è lo stesso che dire*, b è maggiore di a ".

Sempre per mezzo dei termini *eguale, somma*, definiamo il termine *differenza*, dicendo " Un numero si dice diffe-

renza di altri due disuguali, quando sommato col minore di essi dà per somma il maggiore „; quando la frase *disuguali*, significhi, *uno maggiore dell'altro*, e non, *non eguali*, il che implica, come vedremo (pag. 139), altre proprietà dei numeri. In simboli si può porre

$$a, b, c \in \mathrm{N} \,.\, b > c \,:\, \supset \,:\, a = b - c \,.=.\, a + c = b$$

L'ordinaria definizione di differenza " Differenza di due numeri non eguali è ciò che si ottiene **togliendo** dal maggiore il minore „, non ha senso, se non è definito il significato della parola togliere, e ciò nei trattati ordinari non si fa.

Una delle definizioni, qualche volta usata di prodotto è la seguente: " Prodotto di a per b, $a \times b$, è la **somma di b numeri eguali ad a** „. Quando sia noto ciò che significa, somma di b numeri eguali ad a, tale definizione è esatta. Essa in simboli diviene

$$a \in \mathrm{N} \,.\, b \in 1 + \mathrm{N} \,.\, f \in (\iota\, a \,\mathrm{f}\, Z_b) \,:\, \supset \,:\, a \times b = f1 + f2 + \ldots fb$$

e questa, che è la sua forma simbolica *attualmente più semplice*, lascia alquanto a desiderare per semplicità didattica, essendo troppi i concetti che concorrono a formarla.

L'altra definizione, molto usata " Il prodotto è formato col moltiplicando come il moltiplicatore è formato con l'unità „, può soddisfare un metafisico; ma per un matematico, o meglio per uno che ami capire ciò che dice, è un non senso. Inutile il dire che non si può tradurre in simboli, avendo i simboli un significato preciso.

Dei due termini, *eguale, somma*, dei quali ci siamo serviti per definire gli altri termini, non occupiamoci, per ora,

del termine *eguale*, che occorrerà definire in se stesso (vedi pag. 98, P1, 2, 3, e pag. 147, 148); e fissiamo la nostra attenzione sul termine *somma*.

A qualunque individuo un po' adulto, sono familiari certe proprietà della somma. Le seguenti: 1° Dati due numeri qualunque, se ne può sempre trovare la somma e questa somma *è un* numero; 2° Se a numeri eguali si aggiunge uno stesso numero si ottengono numeri eguali; 3° Sommando un primo numero con un secondo, si ottiene il medesimo numero che sommando il secondo col primo; 4° Sommando un primo numero con un secondo e la somma ottenuta con un terzo, si ottiene la medesima somma che sommando il primo con la somma del secondo col terzo.

Se per le def. dei precedenti termini si aveva una certa arbitrarietà riguardo al significato da attribuire loro, più o meno corrispondente a quello del linguaggio comune, per il termine *somma* tale arbitrarietà più non esiste, avendo esso, e il termine N, un significato a tutti noto. Quindi, per noi, definire i termini *somma* e N significa, determinare le proprietà più semplici ad essi inerenti, e che a tutti sono note.

È stato dimostrato, e ciò da molto tempo, che le quattro proprietà sopra indicate sono conseguenze (ammesso però il principio di induzione matematica) delle medesime proprietà nelle quali al 2° numero, nelle proprietà 1ª, 2ª, 3ª, e al 3° nella 4ª, si sostituisca il numero *uno*.

Le proprietà fondamentali dei numeri interi si possono dunque ottenere quando si sia dato un significato alla frase " sommare un numero con uno ", e in pari tempo si sia ammesso essere 1 un numero.

Sommando 1 con 1 si ottiene il 2; sommando il due con l'1 si ottiene il 3. E così seguitando si ha la successione 1, 2, 3, 4,... Tale successione è nota al bambino che non conosce la parola *sommare*, ed è imparando a parlare che il bambino apprende a poco per volta essere *due* il **successivo** di *uno*, *tre* il **successivo** di *due*, e così di seguito, o in altri termini impara a dire che il due **vien dopo** l'uno, il tre **vien dopo** il due, ecc.

Il termine, *successivo*, sinonimo di, *che vien dopo*, si può sostituire al termine *somma*, nel caso di *sommare con uno*. Scrivendo suc al posto di successivo, i numeri che indichiamo con i segni 1, 2, 3, 4,... possono esser indicati con i segni

$$1;\ \text{suc}\,1;\ \text{suc}\,(\text{suc}\,1);\ \text{suc}\,(\text{suc}\,(\text{suc}\,1));\ldots$$

Esprimiamo così con i due soli segni 1, suc, *tutti* gli individui della classe N, indipendentemente dalle difficoltà materiali che si presentano in tale rappresentazione. È per evitare tale difficoltà che per definizione poniamo

$$2 = \text{suc}\,1\,;\ 3 = \text{suc}\,2\,;\ 4 = \text{suc}\,3\,;\ldots \qquad \text{(Def)}$$

ma i termini *due, tre, quattro, ...* , non sono necessari.

Con successive riduzioni siamo giunti a conservare gli enti rappresentati dai segni N, 1, suc. Un ulteriore riduzione non sembra possibile. I termini N, 1, suc, rappresentano quindi idee primitive, idee semplici, che qualunque uomo possiede, e che noi definiamo *in se stessi*, ammettendo che, per essi, sieno vere certe proprietà dalle quali possono dedursi logicamente le altre. Fra tali proprietà, che chiamiamo *primitive*, perchè non ulteriormente

riduttibili, abbiamo le seguenti:

$1 \varepsilon N$ (Pp1)

$a \varepsilon N . \supset . \mathrm{suc}\, a \varepsilon N$ (Pp2)

$a, b \varepsilon N . a = b : \supset : \mathrm{suc}\, a = \mathrm{suc}\, b$ (Pp3)

$u \varepsilon K'N . 1 \varepsilon u . u + 1 \supset u : \supset : N \supset u$ (Pp4)

Con la Pp1 esprimiamo che *uno* è un numero.

Siccome ci risulta che enunciato un numero intero noi possiamo sempre enunciare il suo successivo, riteniamo che " ogni individuo di N abbia in N il suo successivo " (Pp2). Ciò si esprime anche nel linguaggio comune dicendo " la serie dei numeri interi è illimitata ".

Date le definizioni dei segni 2, 3, 4,... dalle Pp1, 2 risultano immediatamente, e *successivamente*, le prop.

$$2 \varepsilon N, \ 3 \varepsilon N, \ 4 \varepsilon N, \ .....$$

Avendo ammesso, con la Pp1, essere N una classe, ha già significato (§ 1) la scrittura $a = b$ se a, b sono numeri interi.

Con la Pp3 esprimiamo che " Sono eguali i successivi di numeri eguali ", proprietà che è caso particolare di quella ripetutamente enunciata tra gli assiomi in quasi tutti i trattati ordinari " aggiungendo una stessa cosa a cose eguali si ottengono cose eguali ", che è la 2ª di quelle enunciate da noi più sopra, e alla prima delle quali corrisponde la Pp2.

Con la Pp4 (principio di induzione, pag. 102) definiamo la *somma*, dando ad $a + 1$ il medesimo significato di suc a e ad $a + (b + 1)$ il medesimo significato di $(a + b) + 1$; diciamo, cioè, che $a + 1$ indica il suc a, $a + 2$ il suc $(a + 1)$, $a + 3$ il suc $(a + 2)$..... (Vedi pag. 127).

Dalle Pp1-4 risultano immediatamente le quattro proprietà fondamentali della somma da noi prima enunciate (Vedi *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, G. Peano, Torino, Bocca, 1889). E risultano pure le proprietà del prodotto, definito mediante una definizione induttiva di seconda specie, senza introdurre il concetto di *numero degli individui di una classe* (§ 2).

	Somma	**Prodotto**	
	$a, b, c \in N . \supset :$	$a, b, c \in N . \supset :$	
	$a + 1 = \text{suc}\, a$	$a \times 1 = a$	(Def)
	$a + (b + 1) = (a + b) + 1$	$a \times (b + 1) = a \times b + b$	(Def)
(1)	$a + b \in N$	$a \times b \in N$	
(2)	$a = b . \supset . a + c = b + c$	$a = b . \supset . a \times c = b \times c$	
(3)	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$	
(4)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	
(5)		$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$	

e tali prop. esprimono che: le operazioni indicate dai segni $+$, $\times$ sono a *risultato unico* (1); che per esse vale il principio della *sostituzione* (2): che per esse vale la proprietà *commutativa* (3), e *associativa* (4); e di più che il *prodotto gode della proprietà distributiva rispetto alla somma* (5).

I segni $>$, $<$, sono già stati da noi definiti, mediante una def. di 2ª specie (pag. 132), facendo uso dei segni N, $+$.

Restano da analizzarsi le proprietà delle relazioni espresse dai segni $>$, $<$, parte delle quali si ottengono dalle Pp precedenti, parte no.

È p. e., conseguenza delle Pp precedenti la prop.

$$a, b \in \mathrm{N} : \supset : a = b \,.\cup.\, a > b \,.\cup.\, a < b$$

(Vedi Peano, *l. c.*, pag. 6), ma non si può, p. e., dimostrare che

$$a, b \in \mathrm{N} \,.\, a = b : \supset : a - > b \,.\, a - < b$$

cioè non si può dimostrare che dei tre casi $a = b$, $a > b$, $a < b$ deve verificarsene uno solo. Per dimostrare questa prop. è necessario ammettere che

$$a, b \in \mathrm{N} \,.\, \mathrm{suc}\, a = \mathrm{suc}\, b : \supset : a = b \qquad \text{(Pp5)}$$

“ se due numeri hanno eguali i successivi, allora essi sono eguali „ e che

$$1 - \in \mathrm{suc}\, \mathrm{N} \qquad \text{(Pp6)}$$

“ uno non è il successivo di un numero intero „.

È necessario cioè ammettere, con la Pp5, l'inversa della ben nota proprietà “ Aggiungendo uno stesso numero a numeri eguali, si ottengono... „, in un caso particolare; e ammettere poi che (Pp6) “ *uno* è il *primo* dei numeri interi „.

Risulta allora che la frase “ il numero a è uguale al numero b „ è equivalente alla frase “ a non è maggiore e non è minore di b „

$$a, b \in \mathrm{N} \therefore \supset \therefore a = b : = : a - > b \,.\, a - < b$$

e risulta anche che la frase “ il numero a non è eguale a b „ è equivalente alla frase “ a è maggiore o è minore di b „

$$a, b \in \mathrm{N} \therefore \supset \therefore a - = b : = : a > b \,.\cup.\, a < b \,.$$

Quindi le due frasi " diseguale ", " maggiore o minore " hanno il medesimo significato solo quando si ammetta che per i segni N, suc, sieno vere le Pp5, 6.

Che le idee espresse dalle Pp1-6 sieno le più semplici che l'uomo abbia riguardo agli enti della classe N, risulta evidentemente dall' analisi da noi fatta. Che tali Pp sieno *sufficienti* per la teoria degli N, è provato, *attualmente*, dal fatto, che non si conosce una prop. sugli N che non sia conseguenza delle Pp1-6. Di più è stato dimostrato (Peano, *Rivista di matematica*, vol. I, pag. 93) che una qualunque delle Pp1-6 non è conseguenza delle altre, e ciò prova che ognuna delle Pp enunciate è *necessaria* nel sistema Pp1-6.

E poichè gli ordinari trattati di aritmetica cominciano di solito con la definizione (?) " Numero intero è..... ", noi concluderemo l'analisi della classe N, osservando che alla dimanda " che cosa è un numero intero? ", si può rispondere " un ente appartenente ad una classe N i cui individui verificano le Pp1-6 " e riteniamo che qualunque altra risposta sia attualmente priva di significato.

***

I segni P, Ɔ, ∩, −, introdotti nel cap. I sono stati definiti per mezzo delle loro proprietà espresse dalle Pp logiche, cioè definiti in se stessi. Abbiamo cioè ammessi come *primitivi* i concetti espressi dai termini: *proposizione, si deduce, e, non*, e come *primitive* le relazioni, tra questi segni, espresse dalle Pp1-11.

Il segno =, tra individui di una classe, è pure stato

Proposizione - Deduzione, Congiunzione - Negazione -

definito in se stesso, con le P1, 2, 3, § 1, cap. IV. Lo stesso si è fatto per i segni di corrispondenza (P1, § 3, cap. IV).

§ 7. — Definizioni di quarta specie.

In certi casi neanche la forma precedente di definizione può essere adottata. Ciò avviene quando l'ente x che si vuol definire, si ottiene come astrazione di un complesso determinato di altri enti noti.

Un razionale, p. e., può esser definito come ente astratto ottenuto da una coppia di numeri interi. Essendo m, n due numeri interi, con m/n indichiamo un ente che dipende da m e da n, e il modo di dipendenza, che noi possiamo stabilire ad arbitrio, (salvo il risultato al quale si vuol giungere), *definisce*, per astrazione, l'ente m/n.

In generale: se u è la cosa nota (p. es., la coppia m, n di numeri interi), allora la cosa che si vuol definire (p. e., il razionale m/n), è una funzione φ di u. Per φu bisogna definire la relazione indicata dal segno $=$, dicendo quale è per le cose φu, φv il significato della relazione $\varphi u = \varphi v$. Tale Def ha la forma

$$h_{u,v} : \supset : \varphi u = \varphi v \,.=.\, p_{u,v}$$

ove $h_{u,v}$ è l'ipotesi relativa alle cose u, v; $p_{u,v}$ è la prop. contenente u, v, avente già significato noto, e che poniamo equivalente alla relazione $\varphi u = \varphi v$ da definire.

In modo analogo si deve definire ogni operazione da eseguirsi con gli enti astratti φu, φv. Essendo α il segno di una operazione, poniamo

$$k_{u,v} \,.\supset.\, (\varphi u)\, \alpha\, (\varphi v) = q_{u,v}$$

ove $k_{u,v}$ è ancora l'ipotesi relativa alle cose u, v, e $q_{u,v}$ è una funzione di u e v, avente già significato noto e che noi poniamo identica al risultato dell' operazione α eseguita con φu e φv.

Le medesime cose possono osservarsi se α è un segno di *relazione*.

La classe H di enti, definiti come funzioni astratte φ degli enti noti u, v,... risulta, con una definizione di *prima specie*, definita, ponendo

$$\mathrm{H} = \overline{x\,\epsilon}\,(u\,\epsilon\,\mathrm{M}\,.\,x = \varphi u\,.\,-=_u \Lambda)$$

ove M è una classe nota, e tale definizione si legge " H è il complesso degli enti x tali, che esiste almeno un u della classe M, per il quale x *è identico* a φu ".

***

Vediamo come possano, con una def. di quarta specie, definirsi, p. es., i numeri razionali.

Nella maggior parte dei trattati si definisce, o almeno si crede definire, il razionale m/n, ove $m, n\,\epsilon\,\mathrm{N}$, dicendo che " m/n è il numero m volte più grande di *un ennesimo di uno* ". Qui i termini non definiti sono due " un ennesimo di uno ", e " m volte più grande ". Ammesso anche che sia stata definita la prima frase, per la seconda si osservi che dalla teoria dei N può aver ricevuto significato *solo* la frase " m volte più grande di un dato N ". Del resto nei trattati ordinari nè l'una frase, nè l'altra si definiscono, e quindi l'ordinaria definizione è priva di significato.

Considerando il razionale m/n come una coppia di numeri interi, allora non ha più senso dire, p. es., che m/n

è eguale a $(2m)/(2n)$, poichè due coppie (x, y), (x', y') si ritengono eguali solo quando $x = x'$ e $y = y'$.

Il razionale m/n non è dunque da considerarsi come una coppia, ma come una *funzione* della coppia (m, n), cioè come un *ente* che si ottiene astraendo da m, da n e dalla coppia (m, n).

Indichiamo per ora, seguendo Euclide almeno per i termini, con R' la frase *ragione di*, o *rapporto di*, e con R' (m, n) la frase " ragione di m ad n ", o " rapporto di m ad n ". Il segno R' (m, n) equivale, come vedremo, all'ordinario segno m/n.

Scrivendo R, come si è già fatto, al posto di *razionale*, definiamo la classe R, ponendo:

$$(1) \qquad \mathrm{R} = \overline{x\,\epsilon}\, \} m, n \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, x = \mathrm{R}'(m, n) \,.\, - =_{m,n} \Lambda \{$$

cioè " Indichiamo col segno R il complesso di quegli enti x tali, che per ognuno di essi esistono almeno due numeri interi m, n tali che x è identico alla funzione R', della coppia (m, n) ".

La funzione R' non è definita, solo con la (1) ammettiamo che essa ad ogni coppia di N faccia corrispondere un ente, astrazione della nostra mente, che appartiene alla classe R; ammettiamo cioè che

$$\mathrm{R}' \,\epsilon\, (\mathrm{R}\, \mathbf{f}\, (\mathrm{N}, \mathrm{N}))$$

" R' è un segno di funzione che fa corrispondere ad ogni coppia di N un R ".

Essendo m, m', n, n' due numeri interi, quando è che gli enti R' (m, n), R' (m', n') sono eguali? E prima di tutto, ha attualmente significato il termine *eguali?*

La coppia (m, n), è eguale alla coppia (m', n') quando $m = m'$ e $n = n'$, ma non essendo stata definita la funzione

R' non ha ancora senso la scrittura $R'(m, n) = R'(m', n')$. Noi diamo significato alla relazione precedente, ponendo, secondo lo Stolz (*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*),

$$m, n, m', n' \epsilon N : \supset : R'(m, n) = R'(m', n') . = . m \times n' = n \times m'$$

ovvero, ponendo come si fa ordinariamente il segno m/n al posto del segno $R'(m, n)$,

$$m, n, m', n' \epsilon N : \supset : m/n = m'/n' : = : mn' = nm'$$

Diciamo cioè che " Il razionale m/n è eguale al razionale m'/n', quando il numero mn' è eguale al numero nm' ".

Dalla teoria dei numeri interi e dalla precedente definizione si deduce, facilmente, che la relazione $a = b$, ove $a, b \epsilon R$, è *riflessiva simmetrica* e *transitiva*, che cioè si ha

$$a, b, c \epsilon R . \supset :$$

$$a = a$$

$$a = b . = . b = a$$

$$a = b . b = c . \supset . a = b$$

come la relazione analoga per gli enti di una classe qualunque (§ 1 . P1, 4, 5).

Definita la relazione espressa dal segno $=$, occorre ancora *definire* le operazioni indicate dai segni $+$, $\times$,... Ciò nei trattati ordinari raramente si fa, mentre si pretende *dimostrare*, p. es., che, $3/7 + 1/7 = 4/7$, *non avendo ancora ricevuto significato il complesso di segni* $3/7 + 1/7$. Per le operazioni indicate dai segni $+$, $\times$, porremo,

seguendo ancora lo Stolz,

$$m, n, m', n' \in \mathrm{N} . \supset . m/n + m'/n' = (mn' + nm')/(nn')$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \supset . (m/n) \times (m'/n') = (mm')/(nn')$$

. . . .

che non hanno bisogno di spiegazioni. Le definizioni ora date sono di seconda specie e la def. di R di prima specie.

***

I numeri reali, p. e., si ottengono in modo analogo considerando l'ente astratto *limite superiore* di una classe di razionali. Scrivendo l' al posto di " limite superiore ", abbiamo,

$$u, v \in \mathrm{K}'\mathrm{R} :: \supset :: \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v \mathrel{.\!\cdot\!.} = \mathrel{.\!\cdot\!.} x \in \mathrm{R} : \supset_x :$$
$$u \cap (x + \mathrm{R}) -\!= \Lambda . = . v \cap (x + \mathrm{R}) -\!= \Lambda$$

" Se u, v sono classi di razionali, allora: dire che il limite superiore degli u è uguale al limite superiore dei v, equivale a dire che, qualunque sia il razionale x, se esistono in u individui maggiore di x, allora esistono in v individui maggiore di x e viceversa ". In altri termini diciamo che " $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v$, quando ogni numero x minore di qualche u è pure minore di qualche v e viceversa ". Alla def. precedente può anche darsi la forma (pag. 79, P6)

$$u, v \in \mathrm{K}'\mathrm{R} :: \supset :: \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v \mathrel{.\!\cdot\!.} = \mathrel{.\!\cdot\!.} x \in \mathrm{R} : \supset_x :$$
$$u \cap (x + \mathrm{R}) = \Lambda . = . v \cap (x + \mathrm{R}) = \Lambda$$

che esprime; " $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v$, quando ogni numero x maggiore di ogni u è maggiore di ogni v e viceversa ".

La funzione che qui si considera è il " limite superiore di ", ed è tale che ad ogni classe di razionali fa corrispondere un ente astrazione della nostra mente, che noi chiamiamo in generale numero reale e che è indipendente dalla classe u che si considera e dalla funzione l'. La classe Q, resta definita ponendo,

$$Q = \overline{x \epsilon} \{ a \epsilon R . u \epsilon K'R . u \cap (a + R) = \Lambda . x = l'u . -=_{u, a} \Lambda \}$$

cioè " Q è l'insieme degli enti x tali che per ognuno di essi si può determinare almeno un razionale a e una classe di razionali non maggiori di a, tali che x possa dirsi identico alla funzione $l'u$ ". Con la condizione $u \cap (a + R) = \Lambda$ escludiamo dalla classe Q l'infinito.

Anche per tali enti occorre definire le operazioni indicate dai segni $+$, $\times$,... Poniamo

$$u, v \epsilon K'R . a \epsilon R . u \cap (a + R) = \Lambda . u \cap (a + R) = \Lambda . \supset :$$
$$(l'u) + (l'v) = l'(u + v)$$
$$(l'u) \times (l'v) = l'(u \times v) .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Cioè " La somma di $l'u$ con $l'v$ è il limite superiore della classe $u + v$ ", " Il prodotto di $l'u$ con $l'v$ è il limite superiore della classe $u \times v$ ".

***

Alle definizioni di quarta specie diamo dunque in generale la forma

$$(1) \qquad h_{u, v} : \supset : (\varphi u) \, \alpha \, (\varphi v) . = . p_{u, v}$$

che definisce il significato della scrittura $(\varphi u) \, \alpha \, (\varphi v)$ ove

u, v sono enti noti, φ è una funzione che produce un nuovo ente φu astrazione dell'ente, o complesso di enti, u, e α è un segno di operazione o di relazione.

Affinchè per la relazione espressa dal segno $=$, nel senso ora introdotto, sia verificata la *legge formale*, è necessario che la funzione φ sia essa stessa *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*, cioè si abbia

$$\varphi u = \varphi u \quad ; \quad \varphi u = \varphi v . = . \varphi v = \varphi u$$

$$\varphi u = \varphi v . \varphi v = \varphi w . \supset . \varphi u = \varphi w$$

Ciò abbiamo veduto che è vero per la funzione R', e si potrebbe verificare facilmente che è vero per la funzione I'.

Tali proprietà di φ sono vere, quando la relazione $p_{u,v}$, contenuta nella precedente def., è pure riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè quando: $p_{u,u}$ sia identicamente vera; $p_{u,v}$ equivalga a $p_{v,u}$; e dall'affermazione simultanea $p_{u,v} . p_{v,w}$, si deduca $p_{u,w}$. Soddisfacendo p a queste condizioni si può da ogni ente u della classe che si considera ottenerne un altro, per astrazione, φu; e per tali enti che così si ottengono, definita l'*eguaglianza* con la (1), ove al posto del segno α si ponga il segno $=$, questa gode delle ordinarie proprietà. Eccone alcuni esempi:

(α) La relazione espressa in geometria, p. es., per le figure piane, dal termine *equivalente* è riflessiva, simmetrica e transitiva. Se il termine *equivalente* lo definiamo dicendo " La figura A è equivalente alla figura B, quando A e B possono decomporsi in parti rispettivamente *eguali* (*sovrapponibili*) ", otteniamo allora da ogni figura piana A, l'ente astratto *area di* A, funzione di A. E diciamo che " Area di A, *è eguale a*, area di B, quando A è equivalente a B ".

(β) La relazione espressa in geometria dal termine *è parallelo*, è riflessiva, simmetrica e transitiva, quando si ammetta che ogni ente (retta o piano) sia parallelo a se stesso. Otteniamo allora da ogni retta A l'ente astratto *punto all'infinito di* A, o *direzione di* A, funzione di A: e diciamo che " La direzione di A *è eguale* alla direzione di B, quando A è parallela a B ". Analogamente definiamo la *giacitura di* A, o *la retta all'infinito di* A, essendo A un piano, e diciamo " La giacitura di A *è eguale* alla giacitura di B, quando A è parallelo a B ".

(γ) Se A, B sono proposizioni, la relazione $A \supset B . B \supset A$ o, A *è equivalente a* B, è riflessiva, simmetrica e transitiva (pag. 27). Otteniamo allora da ogni prop. A l'ente astratto *valore di* A o *significato di* A: e diciamo che " Il significato di A *è eguale* al significato di B, quando A è equivalente a B ". Analoga osservazione vale quando A, B sono classi.

(δ) Le relazioni espresse dai termini, *perpendicolare*, *primo con*, *è un divisore*, *è un multiplo*,... non sono riflessive, simmetriche e transitive. Per mezzo di esse nessun ente astratto si ottiene.

***

Critica del concetto di sostituzione ridotto al con. di uguaglianza

Negli ordinari trattati di aritmetica e geometria si pretende spesso definire la relazione indicata dal segno = dicendo " Una cosa *a* è eguale ad una cosa *b*, quando *a* può essere sostituita in qualunque caso alla cosa *b* ". Ammesso anche noto il significato del termine *sostituire* resta tanto arbitrario il significato del segno = che la proprietà espressa dalla ordinaria definizione può farsi risultare falsa.

Così, p. es., 4/5 è *frazione irreduttibile*; ma 4/5 = 8/10; dunque 8/10 è frazione irreduttibile. Il che è falso. Ed è falso perchè *frazione irreduttibile*, non è una funzione del razionale 4/5, ma invece una funzione della coppia (4, 5), diversa dalla funzione R'(4, 5) o 4/5 (vedi pag. 142). Se dunque definiamo il razionale come funzione di una coppia di numeri, con i termini *frazione irreduttibile* non indichiamo più un razionale nel senso inteso prima. Lo stesso avviene, p. es., per le funzioni *numeratore* o *denominatore* del razionale m/n, per le quali il principio della sostituzione non è vero. Analogamente con le parole, *termini di una somma, fattore di un prodotto*,... non indichiamo funzioni della somma o del prodotto. Occorre pure, p. es., precisare il significato della frase " primo termine di $4+7$ ", poichè essa può indicare uno qualunque dei numeri Z_{10}.

Quando la legge formale è soddisfatta per il segno = cioè la relazione (e la funzione) dalla quale si è ottenuto è riflessiva, simmetrica e transitiva, allora la P6 del § 1 prova che il principio della *sostituzione* è vero per la relazione =.

Per ogni operazione α da eseguirsi con gli individui di una classe, e per ogni relazione α, occorre dimostrare che è vera la legge della sostituzione (pag. 30); cioè che ad ogni ente a possiamo sostituire il suo eguale. Ciò noi abbiamo, p. es., fatto per le operazioni logiche $\frown$, $\smile$ (vedi pag. 31) e per la relazione espressa dal segno $\supset$ (pag. 31).

L'ordinaria definizione del segno = è dunque, in sostanza, un puro complesso di parole privo di significato, come sono molte delle definizioni degli ordinari trattati.

§ 8. — Proposizioni indipendenti.

Le definizioni di 1ª, 2ª, 4ª specie, indipendentemente dall'utilità che presentano, non sono necessarie. Quelle di 1ª e 2ª perchè ogni segno o complesso di segni x, viene sostituito ad un complesso di segni a aventi un significato *determinato* e *noto*. Quelle di 4ª specie, perchè al complesso di segni $(\varphi u)\alpha(\varphi v)$, ove α è un segno o di operazione o di relazione, può, per convenzione, sostituirsi sempre il complesso di segni $q_{u,v}$ (vedi pag. 140), avente significato noto e *indipendente* dal segno di relazione α, e, in certi casi, anche dalla funzione φ.

x = a

Le definizioni di 3ª specie sono però necessarie e rinunziando ad esse, dobbiamo rinunziare allo studio di ogni ente. Per mezzo di esse noi individuiamo un ente x, non direttamente, non ricorrendo cioè ad altri enti noti (all'infuori di quelli logici — necessari sempre), ma per mezzo delle proprietà che esso ha e delle quali scegliamo le più semplici, e ne assumiamo, senza dimostrarle, tante quante sono necessarie per ottenere logicamente le altre.

***

Scelta del sistema primitivo

È appunto nella scelta del sistema primitivo a di proposizioni, atte a definire in se stesso l'ente x, che dobbiamo fare qualche osservazione.

Intanto il sistema α dev'essere *completo*, cioè tale che ogni proprietà dell' ente x, sperimentalmente vera, sia

conseguenza logica di prop. contenute nel sistema α, *e solamente di queste.*

Di più è utile, almeno scientificamente, che il sistema α sia *irreduttibile*, cioè tale che ognuna delle prop. che lo formano non sia conseguenza delle rimanenti.

Non è molto difficile ottenere un sistema α *completo:* basta analizzare accuratamente tutte le idee delle quali ci serviamo. E a ciò si presta molto bene il simbolismo logico, nel quale i segni hanno un significato nettamente determinato, e non è possibile, operando bene — si capisce —, introdurre enti ed idee non comprese in quelle che noi vogliamo considerare, come spesso è facile accada, usando il linguaggio comune, nel quale i termini non sono completamente precisati.

È più difficile assicurarsi se il sistema α ottenuto è *irreduttibile.* In ciò che segue diamo qualche esempio dei metodi che possono condurre ad affermare se un dato sistema α di prop. primitive è o no reduttibile.

***

Sieno U_x, V_x delle proposizioni contenenti la variabile o il gruppo di variabili x. Quando diremo che " la prop. V_x è indipendente dalla prop. U_x ", intenderemo dire che " esistono degli x per i quali essendo vera U_x, si ha che V_x è falsa ". In simboli, dunque, la frase, " la prop. V_x è indipendente dalla prop. U_x " viene espressa da (pag. 69),

(1) $$U_x \,.\, - V_x \,.\, - =_x \,.\, \Lambda$$

o anche da

(1)' $$-(U_x \,.\, \supset_x \,.\, V_x)$$

La (1) si legge " Esistono degli x tali che soddisfano alla condizione U_x e non alla condizione V_x „; la (1)′ si legge " non è vero, che qualunque sia x, gli x che soddisfano ad U_x soddisfano a V_x „.

Evidentemente la relazione " è indipendente da „ non è simmetrica. Alla frase " le prop. U_x, V_x sono indipendenti „, che attualmente è priva di significato, daremo quello espresso dall'affermazione simultanea

$$U_x . - V_x : - =_x : \Lambda .\therefore V_x - U_x : - =_x : \Lambda$$

*
* *

È nelle definizioni degli enti in se stessi (§ 7) che occorre far uso del concetto di proposizioni indipendenti.

Nella teoria delle grandezze, p. e., definiamo la *somma* di due grandezze, assegnando certe proprietà fondamentali del segno $+$. Scrivendo G al posto della parola *grandezza*, alcune delle proprietà del segno $+$ che si assumono per definire in se stessa la somma sono:

$a, b, c \in G : \supset :$

(1) $a = b . \supset . a + c = b + c$

(2) $a + b = b + a$

(3) $a + (b + c) = (a + b) + c$

Volendo provare che tali prop. sono indipendenti, che cioè, una di esse non è conseguenza delle altre, basta provare che per valori speciali degli elementi indeterminati che compariscono nelle prop. (1), (2), (3), una qualunque delle tre prop. è falsa, mentre le altre due sono vere.

Gli elementi indeterminati che compariscano nelle prop. (1), (2), (3) sono rappresentati dai segni G, =, +. Riguardo a tali segni le prop. (1), 2), (3) sono considerate come condizionali della forma $a_x \supset b_x$, (pag. 89). Abbiamo:

(α) Se G è la classe dei numeri reali, chiamiamo eguali due numeri aventi *modulo eguale* (lo stesso valore assoluto), e il segno + ha l'ordinario significato; allora, la prop. (1) è falsa, poichè, p. e., si ha che $7 = -7$ e $7 + 5 \text{-} = -7 + 5$, e le prop. (2), (3) sono vere; cioè la prop. (1) è indipendente dalle prop. (2), (3), e si ha

$$- (1) . (2) . (3) : - = : \Lambda$$

(β) Se G è la classe dei quaternioni, = ha l'ordinario significato e + è il segno del *prodotto* secondo Hamilton; allora, le prop. (1), (3) sono vere e la prop. (2) è falsa, cioè

$$(1) . - (2) . (3) : - = : \Lambda$$

(γ) Se G è la classe dei punti, chiamiamo eguali due punti coincidenti, ed essendo a, b due punti indichiamo con $a + b$ il punto medio del segmento che ha a e b per estremi; allora, le prop. (1), (2) sono vere e la prop. (3) è falsa, cioè

$$(1) . (2) . - (3) : - = : \Lambda$$

Da (α), (β), (γ) si deduce che le prop. (1), (2), (3) sono indipendenti, cioè che non è possibile dedurre una di esse dalle rimanenti.

*
* *

Se il sistema α di postulati che si considera contiene n, $(n \in 1 + N)$, prop., si sarà dimostrato che è *irreduttibile*, quando si sieno trovate n classi di enti x, per ognuna delle quali sia falsa una delle prop. di α e vere le rimanenti. Ora ciò presenta spesso serie difficoltà, e fra i sistemi di postulati attualmente noti, solo quello per gli N, può dirsi assolutamente irreduttibile.

*
* *

Sieno U_x, V_x, W_x delle proposizioni contenenti il gruppo di lettere variabili x: diremo che " W_x è *conseguenza necessaria* della prop. V_x nel gruppo U_x, V_x „ quando, " W_x è conseguenza di U_x e V_x, e W_x è indipendente da U_x „; cioè quando

$$U_x V_x . \supset_x . W_x : U_x - W_x . - =_x . \Lambda$$

Riprendendo il precedente esempio delle grandezze è facile dimostrare che la prop.

$$(4) \qquad n \in 1 + N . f \in G f Z_n . g \in (Z_n f Z_n) \text{ sim} : \supset : \\ f1 + f2 + ... + fn = f(g1) + ... f(gn),$$

che esprime in generale la proprietà *commutativa* della somma, si dimostra facendo uso delle prop. (1), (2), (3). Si ha cioè che

$$(1) . (2) . (3) : \supset : (4)$$

Se ora G è la classe dei punti, chiamiamo eguali due punti coincidenti, e $a + b$ indica il punto medio del segmento che ha i punti a, b per estremi, allora le prop. (1), (2) sono vere, e la prop. (4) è falsa in generale (per $n > 2$). Quindi

$$(1) . (2) . - (4) : - = : \Lambda$$

cioè " la prop. (4) è conseguenza necessaria della prop. (3) nel gruppo (1), (2), (3) ", o in altri termini " la proprietà generale commutativa della somma è conseguenza necessaria della proprietà associativa ".

ERRATA-CORRIGE

Pag. 3, linea 11, *in luogo di* “ $3 \epsilon \mathrm{Np}, 7 \epsilon \mathrm{Np}$ „ *si ponga* “ $3 \epsilon \mathrm{Np} . 7 \epsilon \mathrm{Np}$ „.

Pag. 3, linea 15, *in luogo di* “ 12 „ *si ponga* “ 13 „.

Pag. 6, linea 1, *in luogo di* “ Quando per le... „ *si ponga* “ Quando per la „.

Pag. 64, linea 12 in fine, *in luogo di* “ cioè „ *si ponga* “ ove „.

Pag. 75, *in luogo della prop.* (6) *si ponga*

$$\mathrm{q} = \overline{x \epsilon} (x \epsilon \mathrm{Q} . \cup . x \epsilon - \mathrm{Q} . \cup . x = 0)$$

INDICE

CAPITOLO IV. — **Applicazioni.**